第2回複素解析学II演習 (2011年4月19日実施)

担当教員 平地健吾/ TA 久本智之　松本佳彦

次の問を次回の演習の時間の『はじめ』にレポートとして提出すること.

[R3] $D \subset \mathbb{C}$ を星型領域とする．すなわち，ある $a \in D$ が存在して，任意の $b \in D$ に対して線分 $[a, b]$ は D に含まれるとする．

(1) D は単連結であることを示せ.

(2) D 上の正則関数 f に対して $F' = f$ を満たす正則関数が存在することを示せ.

(3) $\mathbb{C} \setminus D$ は有界な連結成分を持たないことを示せ.

(4) D が有界であれば $\mathbb{C} \setminus D$ は連結であることを示せ.

以下は教室発表用の問題です.

[8] 上半平面 $H = \{z : \mathrm{Im}\, z > 0\}$ から単位円板 Δ への正則関数 f が $f(i) = 0$ を満たせば

$$|f(z)| \leq \left|\frac{z-i}{z+i}\right|$$

が成り立つことを示せ．また等号が成立するのはどのようなときか？

[9] $\Omega \subset \mathbb{C}$ を領域, $\{f_n\}$ を Ω 上の正則関数の列で $\mathrm{Im} f(z) > 0$, $z \in \Omega$, を満たすものとする。$\{f_n\}$ は正則関数あるいは ∞ に広義一様収束する部分列を持つことを示せ。

[10] Φ を Δ 上のベキ級数 $f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots$ で, $|a_n| \leq n$ を満たすものの族とする．このとき, Φ は正規族か？

[11] $\mathcal{F}$ を次の条件：

$$\iint_\Delta |f(z)|^2 \, dxdy \leq 1$$

を満たす Δ 上の正則関数の族とする．このとき, $\mathcal{F}$ は正規族か？

[12] 全単射ではない正則写像 $f : \Delta \to \Delta$ で $f(a) = a$ となる点が存在するものを考える. f の n 回の合成を f_n と表すとき $\{f_n\}$ は a に広義一様収束することを示せ.

[13] 領域 D 上の局所一様有界な正則関数列 $\{f_n\}$ が, D 内に集積点をもつような集合 E 上の各点で収束するならば, D で広義一様収束することを示せ.

[14] f を $\mathbb{C}$ 上の正則関数とする。$f_k(z) = f(kz)$ とおくとき $\{f_k\}_{k \in \mathbf{R}}$ が $r < |z| < R$ 上で正規族になる必要十分条件は f が多項式であることを示せ。

演習問題は`http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~hirachi/courses/`からダウンロードできます．講義メモも載せています.