第11回複素解析学II演習 (2011年6月28日実施)

担当教員 平地健吾/ TA 久本智之　松本佳彦

以下の問を次回の演習の時間の『はじめ』にレポートとして提出すること.

[R14] (1) $f(z)=\int_0^1 e^{-t}t^{z-1}dt$ は $\mathbb{C}$ 上の有理型関数に解析接続可能であり

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{z+n}$$

が成り立つことを示せ. (ヒント：e^{-t} のテーラー展開を使う)

(2) ガンマ関数 $\Gamma(z)$ (問題 [45] 参照) と $f(z)$ の差は $\mathbb{C}$ 上で正則であることを示せ.

以下は教室発表用の問題です.

[60] $f(z)$ を $\mathbb{C}$ 上の C^1 関数で Δ の外では恒等的に 0 になるものとする. このとき

$$u(\zeta)=\iint_{\mathbb{C}}\frac{f(z)}{z-\zeta}dxdy$$

は C^1 であり, $\mathbb{C}\setminus\Delta$ 上では正則であることを示せ.

[61] ($\mathbb{C}$ での Mittag-Leffler の定理) 複素数列 $\{z_n\}_{n\geq 1}$ が $0<|z_1|\leq|z_2|\leq|z_3|\leq\cdots$, $\lim_{n\to\infty}|z_n|=\infty$ を満たすとする. 多項式 $G_n(z)$ に対して多項式 $P_n(z)$ を

$$\left|G_n\left(\frac{1}{z-z_n}\right)-P_n(z)\right|<2^{-n}\quad\text{for}\quad z\in\Delta(0,|z_n|/2)$$

を満たすように選べば

$$F(z)=\sum_{n\geq 1}\left(G_n\left(\frac{1}{z-z_n}\right)-P_n(z)\right)$$

は有理型関数に収束することを示せ. また $z_1=0$ の場合にはこの構成方法をどのように修正すればよいか？

[62] 次のような性質をもつ $\mathbb{C}$ 上の有理型関数 $F(z)$ を構成せよ：

(a) $z_n=n,\ n\in\mathbb{N}$ で留数 n の 1 位の極をもつ.

(b) $z_n=\sqrt{n},\ n\in\mathbb{N}$ で留数 1 の 1 位の極をもつ.

(c) $n\in\mathbb{Z}$ で留数 1 の 1 位の極をもつ.

(d) $(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z})\setminus\{0\}$ で留数 1 の 1 位の極をもつ.

(e) $\mathbb{Z}+i\mathbb{Z}$ で主要部 $(z-(m+ni))^{-3}$ の極をもつ.

[63] 次の $g\in C^{\infty}(\mathbb{C})$ に対して微分方程式 $\partial f/\partial\overline{z}=g$ の解を一つ求めよ.

(a) $g(z)=z$,

(b) $g(z)=\overline{z}$,

(c) $g(z)=z^n\overline{z}^m, n,m\in\mathbb{N}$,

(d) $g(z)=\exp\overline{z}$.