第10回複素解析学II演習 (2011年6月21日実施)

担当教員 平地健吾/ TA 久本智之　松本佳彦

以下の問を次回の演習の時間の『はじめ』にレポートとして提出すること.

[R13] $0<k<1$ に対して上半空間 H 上の正則関数 F を

$$F(w)=\int_0^w \frac{dw}{\sqrt{(1-w^2)(1-k^2w^2)}}$$

によって定義する.

(a) $F(w)$ の $w=0$ での Taylor 展開を w^3 の項まで求めよ．$z=F(w)$ の逆関数 $w=sn(z)$ の $z=0$ での Taylor 展開を z^3 の項まで求めよ.

(b) $sn(z)$ は鏡像の原理により $\mathbb{C}$ 上の有理型関数に解析接続される．$sn(z)$ の極と留数を決定せよ.

以下は教室発表用の問題です.

[55] f は $\omega\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ を周期とする整関数とする．このとき，f の不動点（即ち，$f(z)=z$ を満たす $z\in\mathbb{C}$）が無限個存在することを証明せよ.

[56] ω_1,ω_2 を $\omega_1\omega_2\neq 0,\ \omega_1/\omega_2\notin\mathbb{R}$ を満たす複素数，$f(z)$ を整関数とする．いま，ある複素数 c_1,c_2 が存在して

$$f(z+\omega_1)=c_1f(z),\quad f(z+\omega_2)=c_2f(z)$$

が成立すると仮定する．このとき，ある複素数 α,β が存在して，$f(z)=\alpha e^{\beta z}$ であることを証明せよ.

[57] 級数 $f(z)=\displaystyle\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(z-m\pi)^2}$ は $\mathbb{C}$ 上の $\hat{\mathbb{C}}$ 値正則関数（有理形関数）に収束することを示し，$f(z)$ の周期加群を求めよ.

[58] この問では $n,m\in\mathbb{Z}$ とする．$R\to\infty$ のとき次を示せ：

$$\sum_{1<n^2+m^2<R}\frac{1}{n^2+m^2}=2\pi\log R+O(1)$$

これから $\sum_{nm\neq 0}|n+m|^{-2}=\infty$ を導け.

[59] f が ω_1,ω_2 を周期にもつ楕円関数ならば，f は $\wp$ と $\wp'$ の有理関数として表せることを示せ.