第1回複素解析学II演習 (2011年4月5日実施)

担当教員 平地健吾/ TA 久本智之　松本佳彦

以下の二問を次回の演習の時間の『はじめ』にレポートとして提出すること.

[R1] Ω を $\mathbf{C}$ 内の領域, $f:\Omega\to\mathbb{C}$ を定数でない正則写像とする。このとき f は開写像であることを示せ。

[R2] $\Omega=\{z\in\mathbb{C}:|z|>1\}$ とする。Ω から Ω への双正則写像を全て求めよ。

以下は教室発表用の問題です。Δ を単位円板とする。

[1] Δ から $\mathbb{C}$ への全射正則関数は存在するか？

[2] $f\colon\Delta\to\Delta$ を正則写像とする。$w\in\Delta$ が $f(w)=w$ を満たすとき w を f の不動点という。
(a) f が二つの不動点をもてば f は恒等写像であることを示せ。
(b) 不動点をもたない正則写像 $f\colon\Delta\to\Delta$ は存在するか？

[3] $a,b\in\Delta$ とする。$\Delta\setminus\{a,0\}$ と $\Delta\setminus\{b,0\}$ が双正則同値になるのはどのようなときか？

[4] 帯領域 $\Omega=\{z:-1<\mathrm{Re}z<1\}$ を単位円に移す双正則写像で、$f(0)=0,\ f'(0)>0$ を満たすものを求め $f'(0)$ を計算せよ。

[5] $f(z)$ が原点 $z=0$ をふくむ有界な領域 D の正則自己同型 (D から D への双正則写像) であるとする。$f(0)=0,\ f'(0)=1$ であれば $f(z)=z$ であることを示せ。

[6] $f,g:\Delta\to\Omega$ を正則関数、f は全単射、$f(0)=g(0)$ とする。このとき

$$g(\Delta(0,r))\subset f(\Delta(0,r)),\qquad 0<r<1$$

を示せ。ここで $\Delta(p,r):=\{z:|z-p|<r\}$.

[7] Ω を単位円板の上半部分とする。Ω から Δ への双正則写像 f で境界上の点 $\{-1,0,1\}$ を $\{-1,-i,1\}$ に移すものを求めよ。$f(z)=0$ となる z を求めよ。（リーマンの写像定理の証明の最後にヒントあり）

演習問題は`http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~hirachi/courses/`からダウンロードできます．講義メモも載せています.