第 8 回複素解析学 I 演習 (2006 年 12 月 8 日実施)

担当教員 平地健吾/ TA 松尾信一郎・塚本泰三

[1] から [4] までを解きこの演習時間内に提出してください．これらは理解を深めるための問題であって試験ではありません．相談や質問や文献参照は自由にしてください．

[1]

f を単位円板 Δ 上の正則関数とする．Δ 上の点列 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ であって $|z_n| \to 1$ かつ $\{f(z_n)\}_{n=1}^{\infty}$ が有界集合となるものが存在することを示せ.

[2]

(1),(2) の写像により 1 対 1 にうつるような原点中心の開円板の最大半径を求めよ.
(理由もつけて答えること.)
(1) $w = z^2 - z + 1$ (2) $w = e^z$.

[3]

R を $\mathbb{C}$ 上の有理関数とし, k を正の実数であって $\{|R(z)| \mid z \in \mathbb{C}, R'(z) = 0\} \bigcup \{|R(\infty)|\}$ には属さないものとする．$C = \{z \in \mathbb{C} \mid |f(z)| = k\}$ とおくと C の連結成分の個数は R の極と零点の個数の和を超えないことを示せ.
(k の選び方から C は有限個の disjoint な C^{∞} 級 Jordan 閉曲線たちの和集合として表せる．このことは証明せずに使ってよいとする．)

[4]

$f(z)$ は $|z| < 1$ で正則な関数で, $\mathrm{Re}\, f(z) > 0$, $f(0) = 1$ を満たすものとする.
このとき次の不等式を示せ.

(1) $\left| \dfrac{f(z) - 1}{f(z) + 1} \right| \leq |z|$.

(2) $|f'(0)| \leq 2$.

第 8 回レポート問題 (2006 年 12 月 8 日出題)

[1] から [2] までを解き次回の演習で提出してください．解答には A4 版レポート用紙を使い，複数枚にわたる場合にはホッチキスで止めてください．これが守られていない場合には採点しません．このレポートは成績には関係しないので，誤魔化すことなく厳密に記述してください．演習への希望や質問を書いてくだされば，次回に反映するように努力します．

[1]

Ω を $\mathbb{C}$ の非有界領域であって $\mathbb{C}$ 内で稠密でないもの，f は $\bar{\Omega}$ 上連続かつ Ω 上正則な関数とする．正の定数 B と M があって，$\partial\Omega$ 上 $|f| \leq M$ かつ Ω 上 $|f| \leq B$ ならば，Ω 上 $|f| \leq M$ であることを示せ．

[2]

$f(z)$ は $|z| < 1$ で正則かつ $|z| \leq 1$ で連続で, $f(0) = 0, f(z) \neq 0\,(0 < |z| \leq 1)$ をみたし, かつ $|z| = 1$ の上で $|f(z)| = 1$ が成り立つものとする．このとき, ある複素数 $\alpha\,(|\alpha| = 1)$ と自然数 m が存在して $f(z) = \alpha z^m$ と表せることを示せ．

複素解析学 I サイトでは演習で配布するプリントや講義メモを載せています:

http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~hirachi/courses/complex1-2006/

(問題作成: 塚本泰三)