

## 第7回複素解析学I演習 (2006年12月1日実施)

担当教員 平地健吾/ TA 松尾信一郎&塚本泰三

[1] から [4] までを解いて, この演習時間内に提出してください. これらは理解を深めるための問題であって試験ではありません. 相談や質問や文献参照は自由に行ってください.

### [1] 連結と弧状連結

- (1) 講義ノートを参照して, 連結と弧状連結の定義を書け.
- (2) 集合  $C := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0, -1 \leq y \leq 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x, y = \sin(1/x)\}$  は  $\mathbb{R}^2$  の部分開集合ではないことを示せ.
- (3)  $C$  は連結であることを示せ.
- (4)  $C$  は弧状連結ではないことを示せ.

注: Euclid 空間の部分開集合では連結と弧状連結は同値だった.

### [2] 真性特異点

- (1) 講義ノートを参照して, 真性特異点の定義を書け.
- (2) 函数  $\exp(1/z)$  は原点で真性特異点を持つことを示せ.
- (3) 任意の複素数  $\alpha$  に対して, 原点に収束する点列  $\{z_n\}$  であって  $\exp(1/z_n) \rightarrow \alpha$  となるものを, 具体的に構成せよ.

### [3] 除去可能特異点

- (1) 講義ノートを参照して, 除去可能特異点の定義を書け.
- (2) 函数  $f(z)$  の孤立特異点は, その特異点の近傍で  $\operatorname{Re}f(z)$  が上から有界ならば, 除去可能特異点であることを示せ.

### [4] 計算練習

次の函数たちの原点での特異点を分類せよ:

1.  $\frac{z^4 + z^2 + 3z + 1}{z^5 + z^4}$

2.  $\frac{\sin z}{z}$

3.  $\frac{e^z}{z^2}$

4.  $\sin(1/z)$

5.  $\frac{\tan z}{\log(1+z)}$

6.  $\frac{z}{\sin z}$

## 第7回レポート問題 (2006年12月1日出題)

[1] と [2] を解き次回の演習で提出してください。解答には A4 版レポート用紙を用いて、氏名と学籍番号と出題日を記した表紙を付けて、複数枚にわたる場合にはホッチキスで左上を止めてください。これが守られていない場合には採点しません。このレポートは成績には直接は関係しないので、誤魔化すことなく厳密に記述してください。演習への希望や質問を書いてくだされば、次回に反映するように努力します。

[1]

函数  $f(z)$  は単位開円板上で正則で境界まで連続に拡張できるとする。このとき、任意の  $p \in (0, \infty)$  で

$$\int_{-1}^1 |f(z)|^p |dz| \leq \frac{1}{2} \int_{|z|=1} |f(z)|^p |dz|$$

を示せ。但し、左辺は実軸上を積分して、右辺は単位円周上を積分している。

[2]

函数  $g(z)$  の孤立特異点は函数  $\exp(g(z))$  の極にはならないことを示せ。

複素解析学 I サイトでは演習で配布するプリントや講義メモを載せています:

<http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/hirachi/courses/complex1-2006/>

(問題作成: 松尾信一郎)