第 6 回複素解析学 I 演習 (2006 年 11 月 17 日実施)

担当教員 平地健吾/ TA 松尾信一郎・塚本泰三

[1] から [4] までを解きこの演習時間内に提出してください．これらは理解を深めるための問題であって試験ではありません．相談や質問や文献参照は自由にしてください．

[1]
$\mathbb{C}$ の領域 Ω 上の連続関数 f と Ω 内の閉区間 I があって，f は I の補集合の上で正則とする．このとき，f は Ω 上正則であることを示せ．
(ここで条件を弱めて，閉区間 I を C^1 級の正則 Jordan 曲線 γ に置き換えても同じことが言えます。余裕があればそちらで考えてみてください)

[2]
次の極限を求めよ:

$$\lim_{z\to 0}\frac{(1+z)^{1/z}-e+e\,z/2}{z^2}$$

ただし，$(1+z)^{1/z}=\exp((\log(1+z))/z)$, 対数はベキ級数 $\log(1+z)=z-z^2/2+z^3/3-z^4/4+\cdots$ で定義する (対数はこれ以外の定義を用いてもよい).

[3]
$\mathbb{C}$ の領域 Ω 上の正則関数の列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$,$\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ と Ω 上の恒等的には 0 でない正則関数 g があって，$f_n=h_n g$ であり，$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は Ω 上広義一様収束しているとする．このとき，$\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ も Ω 上広義一様収束することを示せ.

[4]
Ω を複素数平面の領域とする．$f,g:\Omega\to\mathbb{C}$ を正則関数とする．ここで，$w\in\Omega$ を領域内の点として $f(w)=f'(w)=\cdots=f^{(n)}(w)=0,\ f^{(n+1)}(w)\neq 0$ と $g(w)=g'(w)=\cdots=g^{(n)}(w)=0$ を仮定する．このとき $\displaystyle\lim_{z\to w}\frac{g(z)}{f(z)}=\frac{g^{(n+1)}(w)}{f^{(n+1)}(w)}$ を証明せよ.

第 6 回レポート問題 (2006 年 11 月 17 日出題)

次の [1] を解き次回の演習で提出してください．解答には A4 版レポート用紙を使い，複数枚にわたる場合にはホッチキスで止めてください．これが守られていない場合には採点しません．このレポートは成績には関係しないので，誤魔化すことなく厳密に記述してください．演習への希望や質問を書いてくだされば，次回に反映するように努力します．

[1]
f は $\Delta(R)$ で正則とし，その Taylor 展開を $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ とする．このとき，任意の $r\in(0,R)$ に対し等式

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|^2 d\theta=\sum_{n=0}^{\infty}\left|a_n\right|^2 r^{2n}$$

を示せ．また，ある n と $r\in(0,R)$ に対して

$$\max_{|z|=r}|f(z)|=|a_n|r^n$$

が成り立つなら，

$$f(z)=a_n z^n$$

であることを示せ．

複素解析学 I サイトでは演習で配布するプリントや講義メモを載せています:

http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~hirachi/courses/complex1-2006/

(問題作成: 塚本泰三)