第 4 回複素解析学 I 演習略解 (2006 年 10 月 27 日実施)

担当教員 平地健吾/ TA 松尾信一郎・塚本泰三

[1]

(1)

$$\int_{|z|=1} |z-1|\,|dz| = \int_0^{2\pi} \left|e^{i\theta}-1\right|\,d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(e^{i\theta}-1\right)\left(e^{-i\theta}-1\right)}\,d\theta = \int_0^{2\pi} 2\sin\frac{\theta}{2}\,d\theta = 8.$$

(2) $n \le 0$ のときは Cauchy の積分定理より 0. $n>0$ のとき $e^z = \sum_{j=0}^{\infty} z^j/j!$ は積分路上で一様収束するので

$$\int_{|z|=1} e^z z^{-n}\,dz = \sum_{j=0}^{\infty} \int_{|z|=1} \frac{z^{j-n}}{j!}\,dz = \frac{2\pi i}{(n-1)!}, \quad (j=n-1 \text{ 以外の項は } 0)$$

(3) 部分分数分解して計算する．Cauchy の積分公式を用いると

$$\int_{|z|=2} \frac{dz}{z^2+1} = \frac{1}{2i}\int_{|z|=2} \frac{dz}{z-i} - \frac{1}{2i}\int_{|z|=2} \frac{dz}{z+i} = \pi - \pi = 0.$$

(4) $\alpha = 0$ のとき

$$\int_{|z|=1} |z-\alpha|^{-4}|dz| = \int_0^{2\pi} 1\,d\theta = 2\pi.$$

$\alpha \ne 0$ のとき

$$\begin{aligned}\int_{|z|=1} |z-\alpha|^{-4}|dz| &= \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\left(e^{i\theta}-\alpha\right)^2\left(e^{-i\theta}-\bar{\alpha}\right)^2} = \frac{1}{i\bar{\alpha}^2}\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}\cdot ie^{i\theta}d\theta}{\left(e^{i\theta}-\alpha\right)^2\left(e^{i\theta}-\frac{1}{\bar{\alpha}}\right)^2} \\ &= \frac{1}{i\bar{\alpha}^2}\int_{|z|=1} \frac{z\,dz}{(z-\alpha)^2\left(z-\frac{1}{\bar{\alpha}}\right)^2}\end{aligned}$$

となる．$|\alpha|<1$ のとき，$z\left(z-\frac{1}{\bar{\alpha}}\right)^{-2}$ は $|z| \le 1$ を含む領域で正則であることから，Cauchy の積分公式により，

$$\int_{|z|=1} |z-\alpha|^{-4}|dz| = \frac{2\pi i}{i\bar{\alpha}^2}\left.\frac{d}{dz}\right|_{z=\alpha} z\left(z-\frac{1}{\bar{\alpha}}\right)^{-2} = 2\pi\left(1+|\alpha|^2\right)\left(1-|\alpha|^2\right)^{-3}$$

である．また $|\alpha|>1$ ときも同様にして，

$$\int_{|z|=1} |z-\alpha|^{-4}|dz| = \frac{2\pi i}{i\bar{\alpha}^2}\left.\frac{d}{dz}\right|_{z=\frac{1}{\bar{\alpha}}} z\,(z-\alpha)^{-2} = 2\pi\left(1+|\alpha|^2\right)\left(|\alpha|^2-1\right)^{-3}.$$

まとめると，$|\alpha| \lessgtr 1$ に応じてそれぞれ

$$\int_{|z|=1} |z-\alpha|^{-4}|dz| = \pm 2\pi\left(1+|\alpha|^2\right)\left(1-|\alpha|^2\right)^{-3}$$

[2]

$|f(\gamma(t))\gamma'(t)|$ は $I=[0,1]$ 上有界なので $< R_0$ なる R_0 がある．z,w を $\mathbb{C}$ の元とし，z を任意に固定する．$C=\gamma(I)$ とおくと

$$\left|\frac{1}{(\gamma(t)-z)(\gamma(t)-w)}\right| < \frac{1}{\operatorname{dist}(z,C)\operatorname{dist}(w,C)}$$

であり $\mathrm{dist}(w,C)$ は w に関する連続関数なので，ある ϵ_0,R_1 があって，$|z-w|<\epsilon_0$ なら

$$\frac{1}{\mathrm{dist}(z,C)\mathrm{dist}(w,C)} < R_1.$$

δ が任意に与えられたとき，$\epsilon_1 R_0 R_1 < \delta$ なる ϵ_1 をとると，$|z-w| < \min(\epsilon_0, \epsilon_1)$ ならば $|F(z) - F(w)| < \delta$ である．

$F(\infty) = 0$ としたとき ∞ でも F は連続になる．実際 δ が任意に与えられたとする．C は有界なので，ある R_2 があって， $|z|$ が R_2 より大きいとき $\mathrm{dist}(z,C) > R_0/\delta$ となっており，このとき $|F(z)| < \delta$.

[3]

sin のテーラー展開を用いると $z \neq 0$ のとき $f(z) = 1 - \frac{1}{3!}z^2 + \frac{1}{5!}z^4 - \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}z^{2n} + \cdots$ となる．しかし，$z=0$ でも，この等式は成立する．よって，この等式の左辺は収束半径は ∞ だから，f は $\mathbb{C}$ 上の正則関数を定めているといえる．

[4]

(1) Cauchy の積分公式より次を得る．

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - 0} d\zeta = f(0).$$

この左辺の ζ を $\zeta = re^{i\theta}$ として表せば求める等式を得る．

(2) 答えはつぎの通り．

$$\begin{aligned}
\int\int_{|z|\le R} f(z)dxdy &= \int_0^R \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) r d\theta dr && \text{(極座標表示)} \\
&= \int_0^R r \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) d\theta dr \\
&= 2\pi f(0) \int_0^R r dr && (\because (1)\ \text{より}) \\
&= \pi R^2 f(0).
\end{aligned}$$

複素解析学 I サイトでは演習で配布するプリントや講義メモを載せています:

http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~hirachi/courses/complex1-2006/

(解答作成: 塚本泰三)