第 3 回複素解析学 I 演習略解 (2006 年 10 月 20 日実施)

担当教員 平地健吾/ TA 松尾信一郎＆塚本泰三

復習ポイント

- 数学で用いる言葉の全てには定義がある.
- 全ての公式や定理には，仮定があり，結論がある．公式は正しく使う．生兵法は怪我の元.
- 議論は論理的に進める．三段論法を意識する.
- 線積分，Cauchy-Riemann 方程式，項別微分，Cauchy-Hadamard の公式，係数比較法

[1] **線積分**

線積分の定義に従って計算します．数学の抽象的な定義を具体的な計算に適用してみるのは，理解を深めるための重要な作業です．ちなみに，Green の公式や Cauchy の積分公式を用いると著しく楽チンです．しかし，公式は使うからには正しく使いましょう!!

答: $450\pi i, 0, 2\pi i$.

[2] **正則函数**

簡単版を解いてみます.

複素数値函数 $Q(z) = a + bz + c\bar{z}$ が正則であるとは Cauchy-Riemann 方程式

$$\frac{\partial Q}{\partial \bar{z}}(z) = 0$$

を充たすことでした．今の場合，$\partial Q/\partial \bar{z}$ は簡単に計算できて,

$$\frac{\partial Q}{\partial \bar{z}}(z) = c$$

です．よって,

$$Q(z) \text{ が正則.} \iff \frac{\partial Q}{\partial \bar{z}}(z) = 0 \iff c = 0$$

がわかりました.

さて，Cauchy-Riemann 作用素 $\partial/\partial\bar{z}$ の定義を忘れていたら，すぐに復習しましょう!! 複素微分可能であることは Cauchy-Riemann 方程式を充たすことに同値でした．何故でしょうか??

[3] **指数函数**

(1) 講義では指数函数はベキ級数により定義されました．収束半径 ∞ のベキ級数 $\sum z^n/n!$ が定める全平面で正則な函数を指数函数 e^z と呼びます.

(2) なんとなく正しい解答を卒業しましょう．自明でないと認識して欲しいポイントを羅列すれば,

- ベキ級数はその収束半径内で絶対収束する.
- いつでも項別微分可能というわけではない.
- 函数 f は値が 0 になるかもしれない．特に割り算に注意.
- 正則函数は Taylor 展開できて，それは自分自身と一致する．その収束半径.

- 滑らかな函数の Taylor 展開が定める函数は自分自身と異なることもある．その具体例.
- 二つのベキ級数は係数が一致すれば一致する．
- 常微分方程式の解の一意性.

これらは全て証明を要する深い事実です.

何はともあれ証明してみます．(1) で定義された指数函数は与えられた微分方程式を充たします．ここでベキ級数がその収束半径内で項別微分可能なことを使いました．さらに，

$$e^z \cdot e^{-z} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\right) \cdot \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-z)^m}{m!}\right) = \sum_{\mu=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\mu} \frac{z^{(\mu-k)}}{(\mu-k)!} \frac{(-z)^k}{k!} = 1$$

がわかります．特に全平面で $e^z \neq 0$ です．ここでベキ級数が収束半径内で一様収束することと第 2 回演習 [3] を使いました．さて，f は与えられた微分方程式を充たすので，

$$(f(z)e^{-z})' = f'(z)e^{-z} + f(z)(-e^{-z}) = f(z)e^{-z} - f(z)e^{-z} = 0$$

より，$f(z)e^{-z}$ は定数です．ここで複素微分して 0 である函数が定数であることを使いました．ところが，$f(0)e^{-0} = 1$ です．よって，全平面で

$$f(z)e^{-z} = 1 \iff f(z) = e^z$$

が成り立ちます．これが示すべきことでした.

[4] 収束半径の計算練習

収束半径を求める公式を復習しましょう．その証明も含めて理解すればなかなか忘れません．我々数学者は理解するために証明するのです．ところで，上極限 $\limsup$ と極限 $\lim$ が異なる簡単な数列の例は $1 + (-1)^n$ です．上極限は 2 ですが，極限は存在しませんね．ちなみに，極限が存在するならば，それは上極限と一致します.

(1) Cauchy-Hadamard の公式が使えます.

$$\log(\sqrt[n]{n^{\log n}}) = \frac{(\log n)^2}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

に気付けば，収束半径は 1 だと求まります.

(2) このベキ級数の係数は常に 0 ではないので，係数比較法が使えます.

$$\frac{n!/n^n}{(n+1)!/(n+1)^{(n+1)}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow{n\to\infty} e$$

より，収束半径が e だとわかりました.

複素解析学 I サイトでは演習で配布するプリントや講義メモを載せています:

http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/ hirachi/courses/complex1-2006/

(略解作成: 松尾信一郎)