第 3 回複素解析学 I 演習 (2006 年 10 月 20 日実施)

担当教員 平地健吾/ TA 松尾信一郎＆塚本泰三

[1] から [4] までを解いて，この演習時間内に提出してください．これらは理解を深めるための問題であって試験ではありません．相談や質問や文献参照は自由にしてください．

[1] **線積分**

(1) 円周 $C_1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 15\}$(向きは反時計回り) に沿って，函数 $f_1(z) := \bar{z}$ を線積分せよ．

(2) 円周 $C_2 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z-7| = 5\}$(向きは反時計回り) に沿って，函数 $f_2(z) := z^3$ を線積分せよ．

(3) 円周 $C_3 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$(向きは反時計回り) に沿って，函数 $f_3(z) := 1/z$ を線積分せよ．

[2] **正則函数**

複素数係数多項式

$$P(z) = \sum_{j,k=0}^{n} a_{jk} z^j \bar{z}^k$$

は複素平面 $\mathbb{C}$ 上の複素数値函数を定義するが，$P(z)$ が正則函数になるのはどのようなときか？

[3] **指数函数**

(1) 講義ノートを参照して，指数函数の定義を書け．

(2) 複素平面 $\mathbb{C}$ 上の正則函数 $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ は，微分方程式

$$\begin{cases} f'(z) = f(z) \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

を満足するとせよ．このとき，f は (1) で定義された指数函数に一致することを示せ．

[4] **収束半径の計算練習**

(1) 級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\log n} z^n$$

の収束半径を求めよ．

(2) 級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n$$

の収束半径を求めよ．

第 3 回レポート問題 (2006 年 10 月 20 日出題)

[1] と [2] を解き次回の演習で提出してください．解答には A4 版レポート用紙を用いて，氏名と学籍番号と出題日を記した表紙を付けて，複数枚にわたる場合にはホッチキスで止めてください．これが守られていない場合には採点しません．このレポートは成績には直接は関係しないので，誤魔化すことなく厳密に記述してください．演習への希望や質問を書いてくだされば，次回に反映するように努力します．

[1] **対数函数**

ベキ級数

$$f(z) := z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \cdots + (-1)^{(n-1)}\frac{z^n}{n} + \cdots$$

について，次の問に答えよ．

(1) f の収束半径を求めよ．

(2) 収束円の内部での微分 $f'(z)$ を求めよ．

(3) 収束円の内部では $e^{f(z)} = 1 + z$ が成り立つことを示せ．

[2] **線積分**

f, g を閉区間 $[a, b]$ 上の実数値連続函数として，f は $|f(t)| < 1$ を満たすとする．また，γ を複素平面の単位円周に反時計回りに向きを与えたものとする．このとき，

$$\int_a^b g(t)\,dt = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \left(\int_a^b \frac{g(t)}{z - f(t)}\,dt\right) dz$$

を厳密に示せ．

複素解析学 I サイトでは演習で配布するプリントや講義メモを載せています:

http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/ hirachi/courses/complex1-2006/

(問題作成: 松尾信一郎)