第2回複素解析学I演習略解 (2006年10月13日実施)

担当教員 平地健吾/ TA 松尾信一郎・塚本泰三

[1]

(1) 非調和比 $(\varphi(z), i, -1, 1) = (z, 1, i, -1)$ であることから，$\varphi(z) = \frac{(1+2i)z+1}{z+(1-2i)}$.
(2) (1) と同様．$\psi(z) = \frac{6iz+2}{z+3i}$.
(3) 1 次変換は 3 点の像を指定すれば一意的に定まることから，相異なる 3 点を不動点とする 1 次変換は恒等写像 z に限られる．
(4) 任意の 3 点が任意の 3 点にうつる 1 次変換が必ず存在し，また，3 点の像によって 1 次変換は一意的に決まる．いま a, b は不動点であるため，例えば，0 の像が $\lambda \in \hat{\mathbb{C}} \setminus \{a, b\}$ であるような 1 次変換 τ を求めればよい．$\lambda = \infty, \lambda \neq \infty$ に応じて，それぞれ

$$\frac{\tau(z)-a}{\tau(z)-b} = \frac{z-a}{z-b}, \quad \frac{\tau(z)-a}{\tau(z)-b} \Big/ \frac{\lambda-a}{\lambda-b} = \frac{z-a}{z-b}$$

であるが，第 1 式は $\frac{\lambda-a}{\lambda-b} = 1$ と解釈したものに他ならないので，結局，求める 1 次変換は

$$\frac{\tau(z)-a}{\tau(z)-b} = \mu \frac{z-a}{z-b}, \quad \mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

ですべて尽くされる．$\tau(z) = \frac{(a-\mu b)z+(\mu-1)ab}{(1-\mu)z+a\mu-b}$, $\mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

[2] **訂正** (1) において α が何であるかを明記していませんでした．問題文の「$\Delta(1) = \{|z| < 1\}$ とする.」という箇所を,「$\Delta(1) = \{|z| < 1\}$, $\alpha \in \Delta(1)$ とする.」に訂正します．申し訳ありませんでした．
(1) α, $\bar{\alpha}^{-1}$ は単位円に関して，互いに鏡像であるから，$\varphi_\alpha\left(\bar{\alpha}^{-1}\right) = \infty$ である．よって，例えば，$\varphi_\alpha(z) = \frac{z-\alpha}{-\bar{\alpha}z+1}$ とおく．すると

$$|z| < 1 \iff 1 - |\varphi_\alpha(z)|^2 = \frac{\left(1-|\alpha|\right)^2 \left(1-|z|\right)^2}{|\bar{\alpha}z-1|^2} > 0$$

であるから，求める 1 次変換が得られた．
(2) ヒントに従うと $\tau \circ \varphi_{\tau^{-1}(0)}^{-1}$ は $0, \infty$ をそれぞれ $0, \infty$ にうつすので，λz の形である．さらに単位円を単位円にうつすことから，$e^{i\theta}z$, $\theta \in \mathbb{R}$ の形になり，$\tau(z) = e^{i\theta}\varphi_{\tau^{-1}(0)} = e^{i\theta}\frac{z-\alpha}{-\bar{\alpha}z+1}$, $\alpha = \tau^{-1}(0) \in \Delta(1)$ を得る．
(3) i の実軸に関する鏡像 $-i$ が ∞ にうつることに注意する．例えば，$\psi(z) = \frac{z-i}{z+i}$.
(4) σ は上半平面を上半平面にうつす 1 次変換であるとする．$\psi \circ \sigma \circ \psi^{-1}$ は $\Delta(1)$ を $\Delta(1)$ の上にうつすので，$\psi \circ \sigma \circ \psi^{-1} = \varphi_\alpha$ と書ける．ゆえに $\sigma = \psi^{-1} \circ \psi \circ \sigma \circ \psi^{-1} \circ \psi = \psi^{-1} \circ \varphi_\alpha \circ \psi$ と書ける．

[3]

$$\sum_{n=0}^{N} |c_n| \leq \sum_{0 \leq n+k \leq N} |a_n||b_k| \leq \sum_{0 \leq n \leq N,\ 0 \leq k \leq N} |a_n||b_k| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \sum_{n=0}^{\infty} |b_n|,$$

$$\begin{aligned}\left| \sum_{n=0}^{2N} a_n \sum_{n=0}^{2N} b_n - \sum_{n=0}^{2N} \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k \right| &\leq \sum_{\substack{2N < n+k, \\ n \leq 2N, k \leq 2N}} |a_n||b_k| \leq \sum_{\substack{0 \leq n \leq 2N, \\ 0 \leq k \leq 2N}} |a_n||b_k| - \sum_{\substack{0 \leq n \leq N, \\ 0 \leq k \leq N}} |a_n||b_k| \\ &= \sum_{n=0}^{2N} |a_n| \sum_{n=0}^{2N} |b_n| - \sum_{n=0}^{N} |a_n| \sum_{n=0}^{N} |b_n|\end{aligned}$$

のそれぞれの不等式から，絶対収束することがわかり，和が求まる．

(コメント) [1] (1),(2) 非調和比を用いる方法の他に，$1, i, -1$ を $0, 1, \infty$ にうつす 1 次変換と，$i, -1, 1$ を $0, 1, \infty$ にうつす 1 次変換の逆変換を合成する方法もあります．また $\varphi(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ とおいて，条件から a, b, c, d を決定することも出来ます．
(3) 2 次方程式に帰着する解答も正答としていますが，この場合，厳密には ∞ が不動点になっている場合が抜けてしまいます．(つまり $\frac{a\infty+b}{c\infty+d} = \infty$ の意味を考える必要がでてきてしまいます．) 非調和比を用いても証明できます．
[2] (1) φ_α の下に付いている α の意味が分からないという質問がありました．単位円板を単位円板にうつす 1 次変換 φ は無数に存在しますが，問題にあるように，単位円板内のどの点が 0 にうつるかを指定すれば，(そのようなものは必ず存在して，更に) 一意的に決まってしまいます．つまり単位円板を単位円板にうつす 1 次変換 φ は $\Delta(1)$ の点 α を用いてパラメータ付けできるため，それを φ_α と書いているのです．
(5) 上半平面を上半平面に映す 1 次変換は一般に

$$\sigma(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R})$$

と書かれます．ただし $SL(2, \mathbb{R})$ は 2 次実行列で行列式が 1 であるもの全体の集合です．

複素解析学 I サイトでは演習で配布するプリントや講義メモを載せています:

http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/ hirachi/courses/complex1-2006/

(略解作成: 伊藤健一さんのファイルを塚本が編集)