第 2 回複素解析学 I 演習 (2006 年 10 月 13 日実施)

担当教員 平地健吾/ TA 松尾信一郎・塚本泰三

[1] から [3] までを解きこの演習時間内に提出してください．これらは理解を深めるための問題であって試験ではありません．相談や質問や文献参照は自由にしてください．

[1] **1 次変換**

(1) $1,\ i,\ -1$ を $i,\ -1,\ 1$ にうつす 1 次変換 φ を求めよ．

(2) $-1,\ i,\ 1$ を $-2,\ i,\ 2$ にうつす 1 次変換 ψ を求めよ．

(3) 恒等変換でない 1 次変換の不動点は高々2 点であることを示せ．

(4) 相異なる 2 点 $a \neq \infty,\ b \neq \infty$ を不動点とする 1 次変換をすべて求めよ．

[2] **単位円板 $\Delta(1)$ の自己同型**

(1) $\Delta(1) = \{|z| < 1\}, \alpha \in \Delta(1)$ とする．１次変換 φ_α で $\varphi_\alpha(\Delta(1)) = \Delta(1),\ \varphi_\alpha(\alpha) = 0$ となるものを１つ求めよ．

(2) $\Delta(1)$ を $\Delta(1)$ の上にうつす任意の 1 次変換 τ の一般形を求めよ．(ヒント：$\tau \circ \varphi_{\tau^{-1}(0)}^{-1}$ を考える．)

(3) 上半平面 $\mathbb{H} = \{\operatorname{Im} z > 0\}$ を $\Delta(1)$ の上にうつす 1 次変換 ψ で，$\psi(i) = 0$ となるものをひとつ求めよ．

(4) 上半平面を保つ一次変換を決定せよ (ヒント：(2)，(3) で求めた 1 次変換を用いる．)

[3] **絶対収束**

級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n,\ \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ は絶対収束するとする．このとき，

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k$$

とおくと，$\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ は絶対収束し，

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$$

が成り立つことを示せ．

第 2 回レポート問題 (2006 年 10 月 13 日出題)

[1] から [2] までを解き次回の演習で提出してください．解答には A4 版レポート用紙を使い，複数枚にわたる場合にはホッチキスで止めてください．これが守られていない場合には採点しません．このレポートは成績には関係しないので，誤魔化すことなく厳密に記述してください．演習への希望や質問を書いてくだされば，次回に反映するように努力します.

[1] **1 次変換**
1 次変換で $\{|z| < 1\} \cap \{|z-2| < r\}$ を $\{\mathrm{Re}\, z > 0,\ \mathrm{Im}\, z > 0\}$ の上にうつすものが存在するための $r > 0$ の条件と，そのときの 1 次変換を求めよ.

[2] **Zhukovski の関数**
(1) $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $z \mapsto \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ による，0 を中心とする円の族と，0 を始点とする半直線の族の像を調べよ.（細かい場合分けをした方が良い.）
(2) $\{|z| > 1\}$ と $\{|z| < 1\}$ の像はそれぞれどのような集合か？
(3) f を Riemann 球面から Riemann 球面への写像 $\hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ とみたとき，1 次変換 φ で,

$$\varphi^{-1} \circ f \circ \varphi(z) = z^2$$

を満たすものをひとつ求めよ.（ヒント：$f(z)$ の不動点と z^2 の不動点に着目せよ.）

複素解析学 I サイトでは演習で配布するプリントや講義メモを載せています:

http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~hirachi/courses/complex1-2006/

(問題作成: 平地／昨年度の TA 伊藤健一さんのファイルを編集したものです)