第 1 回複素解析学 I 演習略解 (2006 年 10 月 6 日実施)

担当教員 平地健吾/ TA 松尾信一郎

[1] **ϵ-δ 論法の復習**

これはさすがによく出来ていました．危険を悟った者は各自で復習してください．これからの数学科人生の先行きに不安を感じたら，いつでも相談に来てください．もちろんまだ間に合います．急がば回れ.

[2] **Gauss-Lucas の定理**

多項式 $P(z)$ の零点が全て上半平面 H 内にあれば，その微分 $P'(z)$ の零点も全て H 内にある，を示してみます．$P(z)$ の次数を n とします.

まず，代数学の基本定理により，複素数 $a, \alpha_1, \cdots, \alpha_n$ が存在して，

$$P(z) = a(z - \alpha_1) \cdots (z - \alpha_n)$$

と因数分解できます．ここで，仮定から，任意の $j = 1, \cdots, n$ で $\mathrm{Im}[\alpha_j] > 0$ が成り立ちます．さて，任意の点 $w \in \mathbb{C} \setminus H$ において，$P(w) \neq 0$ であり，任意の $j = 1, \cdots, n$ で $\mathrm{Im}[w - \alpha_j] < 0$ が成り立つことに，注意しましょう．すると，

$$\mathrm{Im}\left[\frac{P'(w)}{P(w)}\right] = \mathrm{Im}\left[\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{w - \alpha_j}\right] > 0$$

がわかります．よって，特に，$P'(w) \neq 0$ です．これが示すべきことでした.

一般の場合も同様です．この問題は大学入試レベルですね.

[3] **一様収束**

(1), (2) 略.

(3) 誰も出来ていませんでした．少し詳しく解説します.

正弦函数の周期性に着目すれば，$-\pi \leq x \leq \pi$ の範囲を調べればよいわけです.

まず，$x = \pm\pi$ のときは両辺 $= 0$ です.

次に，$0 < \epsilon \leq \pi$ に対して，$|x| \leq \pi - \epsilon$ のときを考えましょう.

$$z := re^{ix}, 1 + z := Re^{i\psi} \quad (r, R \in \mathbb{R}_{\geq 0}, |\psi| < \pi)$$

としたとき，任意の $N \in \mathbb{N}$ で

$$\log(1 + z) = z - \frac{z^2}{2} + \cdots + (-1)^{(N-1)} \frac{z^N}{N} + \int_0^z \frac{w^N}{1 + w}\, dw$$

と展開できます．この展開の虚部をとって，

$$\psi = r \sin x - \frac{r^2 \sin 2x}{2} + \cdots + (-1)^{(N-1)} \frac{r^N \sin Nx}{N} + \mathrm{Im}\left(\int_0^z \frac{w^N}{1 + w}\, dw\right)$$

がわかります．結局,

$$R_N := \int_0^z \frac{w^N}{1 + w}\, dw$$

の $N \to \infty$ での挙動を調べればよいわけです.

さて，$|z|<1, |x|<\pi-\epsilon$ のとき，

$$|1+z|>1-\cos\epsilon$$

となることに注意すれば，

$$\begin{aligned}|R_N| &= \left|\int_0^z \frac{w^N}{1+w}\,dw\right| = \left|\int_0^1 \frac{z^N t^N}{1+z} z\,dt\right| \\ &\leq \frac{|z|^{(N+1)}}{1-\cos\epsilon}\int_0^1 t^N\,dt \leq \frac{1}{(1-\cos\epsilon)(N+1)}\end{aligned}$$

と評価が出来ます．よって，$r\leq 1, |\psi|<\pi-\epsilon$ ならば，$N\to\infty$ のとき，R_N は一様に 0 に収束します．特に，$r=1$ のときには，$2x=\psi$ でした．従って，今まで全てを合わせれば，$|x|<\pi$ ならば，一様に

$$\frac{x}{2}=\sin x-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-\cdots$$

となることが，わかります．これが私たちの知りたいことでした．

注 この極限函数は $x=m\pi(m\in\mathbb{Z})$ で連続ではありません．連続函数の一様収束極限は連続でした．$x=m\pi$ では何が起きているのでしょうか??

[4] **収束半径**

(1) 講義ノート参照.

(2) 収束半径は 1 です．Cauchy-Hadamard の公式を用いてもよいですが，もっと虚心坦懐にも出来ます．このベキ級数をじっと睨めば，$|z|>1$ では発散し，$|z|<1$ では収束することが，すぐにわかりますね．よって，定義より，収束半径は 1 です．素数が云々はこけおどしです．騙されてはいけません．

これで略解は終わりです．疑問があれば，いつでも訊いてください．また，解答や採点に間違いを見付けても，いつでも申し出てください．これから半年間よろしくお願いします．

複素解析学 I サイトでは演習で配布するプリントや講義メモを載せています:

http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/ hirachi/courses/complex1-2006/

(略解作成: 松尾信一郎)