第 12 回複素解析学 I 演習略解 (2007 年 1 月 26 日実施)

担当教員 平地健吾/ TA 松尾信一郎・塚本泰三

[1]

$z^\lambda = \exp(\lambda \log z)$ で定義する．定義域は，例えば $\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} | \operatorname{Re} z \le 0, \operatorname{Im} z = 0\}$ をとればよいが，この領域で $\log z$ は正則だから，z^λ も正則である．一般には原点を含まない単連結領域を定義域とすることができる。

[2]

(a)$f = gz^m, m \in \mathbb{N}, g \neq 0$ と書くと，$\partial\Delta$ 上 $|g| = 1$ だから，最大値の原理より $g = \text{const.}$

(b) 適当な一次分数変換 $\phi \in \operatorname{Aut}(\Delta)$ をとれば，$\phi \circ f$ は (a) の条件を満たし，$m = 1$ であるから，$\phi \circ f \in \operatorname{Aut}(\Delta)$，よって $f \in \operatorname{Aut}(\Delta)$，つまり f は一次分数変換.

[3]

$\gamma' = f \circ \gamma$ とおくと γ' は $\Delta(1, 1)$ 内の閉曲線であり，

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \int_{\gamma'} \frac{1}{z} dz$$

だが，Cauchy の定理より，これは 0 である．

[4]

$$I(\xi) = \frac{e^{-\xi^2}}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-i\xi)^2} dx + \frac{e^{-\xi^2}}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+i\xi)^2} dx$$

$R > 0$ にたいして R から $R + i\xi$ にいたる線分を L_R，$-R + i\xi$ から $-R$ にいたる線分を L'_R とすると，

$$\int_{-R}^{R} e^{-(x-i\xi)^2} dx - \int_{-R}^{R} e^{-x^2} dx = \int_{L_R} e^{-(x-i\xi)^2} dx + \int_{L'_R} e^{-(x-i\xi)^2} dx.$$

$$\left| \int_{L_R} e^{-(x-i\xi)^2} dx \right| \le |\xi| e^{-R^2+\xi^2} \to 0 \quad (R \to \infty)$$

$$\left| \int_{L'_R} e^{-(x-i\xi)^2} dx \right| \le |\xi| e^{-R^2+\xi^2} \to 0 \quad (R \to \infty)$$

よって，

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-i\xi)^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

同様にして

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+i\xi)^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

もわかるから，$I(\xi) = \sqrt{\pi} e^{-\xi^2}$.

[5]

(a) 三角不等式より $|z| = 1$ のとき $|f(z) - 3z^6| < 3$ であるから，f は $|z| < 1$ 上 6 個の零点を持つ．つまり，f は $|z| \ge 1$ 上零点を持たない.

(b)$w = 1/z$ と変数変換すると，

$$\int_{|z|=1} \frac{z^5}{3z^6 - z^2 - z + 1} dz = -\int_{w=1} \frac{1}{w(3 - w^4 - w^5 + w^6)} dw$$

だが，(a) の結果と留数定理より，積分の値は $-2\pi i/3$.

複素解析学 I サイトでは演習で配布するプリントや講義メモを載せています:

http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~hirachi/courses/complex1-2006/

(解答作成: 塚本泰三)