第 1 回複素解析学 I 演習 (2006 年 10 月 6 日実施)

担当教員 平地健吾/ TA 松尾信一郎, 塚本泰三

[1] から [4] までを解いて，この演習時間内に提出してください．これらは理解を深めるための問題であって試験ではありません．相談や質問や文献参照は自由にしてください．

[1] **ϵ-δ 論法の復習**

(1) 実数列 $\{x_n\}$ が実数 x に収束することの ϵ-δ 論法による厳密な定義を与えよ．

(2) 各自が (1) で与えた定義に従い，

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \text{ and } \lim_{n\to\infty} b_n = b \quad \longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$$

を厳密に示せ．

(3) 函数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が点 $x \in \mathbb{R}$ で連続であることの ϵ-δ 論法による厳密な定義を与えよ．

(4) 各自が (2) で与えた定義に従い，函数

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2$$

が各点で連続であることを厳密に示せ．

[2] **Lucas の定理**

一変数多項式 $P(z)$ の零点が全て一つの半平面内にあれば，その導函数 $P'(z)$ の零点も全て同じ半平面内にあることを，示せ．

[3] **一様収束**

(1) 級数の収束と絶対収束の厳密な定義を述べよ．

(2) 級数の一様収束の厳密な定義を述べよ．

(3) 次の級数の和を求め，一様収束する範囲を求め，極限函数の連続性について調べよ:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{(n-1)}\frac{\sin(nx)}{n} \quad (x \in \mathbb{R})$$

[4] **収束半径**

(1) ベキ級数の収束半径の厳密な定義を述べよ．

(2) 素数で n 番目に小さいものを p_n とするとき，ベキ級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^{p_n}$$

の収束半径を求めよ．

第 1 回レポート問題 (2006 年 10 月 6 日出題)

[1] と [2] を解き次回の演習で提出してください．解答には A4 版レポート用紙を用いて，氏名と学籍番号と出題日を記した表紙を付けて，複数枚にわたる場合にはホッチキスで止めてください．これが守られていない場合には採点しません．このレポートは成績には直接は関係しないので，誤魔化すことなく厳密に記述してください．演習への希望や質問を書いてくだされば，次回に反映するように努力します．

[1] **発散の速度**

(1) 次を示せ:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1/1+\cdots+1/n}{\log n}=1$$

(2) 正実数の列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して

$$s_n=a_1+\cdots+a_n \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

と定める。このとき、

$$\lim_{n\to\infty}s_n=\infty$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{s_n}=0$$

が満たされるならば、

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1/s_1+\cdots+a_n/s_n}{\log s_n}=1$$

となることを示せ。

[2] **計算練習**

次の級数の収束半径を求めよ:

$$(1)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n^n} \qquad (2)\ \sum_{n=0}^{\infty}z^{n^2} \qquad (3)\ \sum_{n=0}^{\infty}n!z^n \qquad (4)\ \sum_{n=0}^{\infty}\{2^n+(-3)^n\}z^n$$

パズル

自然数の逆数の和は発散するが，10 進法表記で 1 を含まない自然数の逆数の和はどうか？

複素解析学 I サイトでは演習で配布するプリントや講義メモを載せています:

http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/ hirachi/courses/complex1-2006/

(問題作成: 松尾信一郎)