

正規、パラコンパクト Hausdorff、1 の分割

古田幹雄

2012 年 1 月 3 日*

- 1 の分割の基本事項のまとめを与える。
- 「広義の 1 の分割」の存在が 1 の分割の存在を導くこと
- Tietze の拡張定理、Urysohn の補題
- 正規空間、パラコンパクト Hausdorff 空間の 1 の分割を用いた特徴づけ
- 距離空間のパラコンパクト性。
- 多様体、 ℓ^p 上における C^r 級 1 の分割の存在。

1 定義

1.1 細分、局所有限、1 の分割

Definition 1 (細分). 位相空間 X のふたつの開被覆 $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$, $\mathcal{V} = \{V_\beta\}_{\beta \in B}$ に対して、 \mathcal{V} が \mathcal{U} の細分であるとは、次をみたすことである。 $\forall \beta \in B \exists \alpha \in A V_\beta \subset U_\alpha$.

Definition 2 (局所有限性). 位相空間 X の部分集合からなる族 $\{S_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ が局所有限であるとは、任意の $x \in X$ に対してある開近傍 U が存在して $\#\{\lambda : S_\lambda \cap U \neq \emptyset\} < +\infty$ となることである。

Definition 3 (1 の分割). 位相空間 X の開被覆 $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ に対して $\{\rho_\alpha\}_{\alpha \in A}$ が \mathcal{U} に従属する 1 の分割であるとは、以下を満たすこととする。

1. 各 $\rho_\alpha : X \rightarrow [0, +\infty)$ は非負の連続関数で次を満たす。 $\sum_{\alpha \in A} \rho_\alpha = 1$.
2. $\text{supp}(\rho_\alpha) \subset U_\alpha$ であり、 $\{\text{supp}(\rho_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ は局所有限。

Definition 4 (広義の 1 の分割 (ここだけの言い方)). 位相空間 X の開被覆 $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ に対して $\{\sigma_\alpha\}_{\alpha \in A}$ が \mathcal{U} に従属する「広義の 1 の分割」であるとは、以下を満たすこととする。

1. 各 $\sigma_\alpha : X \rightarrow [0, +\infty)$ は非負の連続関数で次を満たす。 $\sum_{\alpha \in A} \sigma_\alpha = 1$.
2. $\sigma_\alpha|_{X \setminus U_\alpha} = 0$

Remark 5. 連続関数 f と X の開集合 U に対して次の逆は成立しない。

$$\text{supp}(f) \subset U \implies f|_{X \setminus U} = 0.$$

*2012/1/4, 1/6 説明追加、誤り訂正, 1/23 Tietze の拡張定理の証明の誤り訂正

Proposition 6. 1. 位相空間 X の開被覆 $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ の細分 $\mathcal{V} = \{V_\beta\}_{\beta \in B}$ にたいして、 \mathcal{V} に従属する広義の 1 の分割が存在するならば、 \mathcal{U} に従属する広義の 1 の分割が存在する。

2. 位相空間 X の開被覆 $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ に広義の 1 の分割が存在したとする。このとき同じ添え字をもつ X の開被覆 $\mathcal{V} = \{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ であって局所有限かつ $\forall \alpha \overline{V_\alpha} \subset U_\alpha$ を満たすものが存在し、さらに \mathcal{V} に従属する 1 の分割 $\{\rho_\alpha\}$ が存在する。とくに \mathcal{U} に従属する 1 の分割が存在する。

Proof. *1

(1) の証明 :

- $\{\sigma_\beta\}_{\beta \in B}$ が \mathcal{V} の広義の 1 の分割であるとする。
- 写像 $\phi: B \rightarrow A$ を $V_{\phi(\beta)} \subset U_{\phi(\beta)}$ となるようにとり*2、 σ_α を次のようにおく。

$$\sigma_\alpha = \sum_{\beta: \phi(\beta)=\alpha} \sigma_\beta$$

- このとき $\sigma_\alpha|_{X \setminus U_\alpha} = 0$, $\sum_{\alpha \in A} \sigma_\alpha = \sum_{\beta \in B} \sigma_\beta = 1$.
- 各 $\alpha \in A$ に対して σ_α が下連続かつ上連続であることを示せばよい。
- 各 σ_β が非負の連続関数であるからそれらの和の形をした σ_α も下半連続である。
- 同様に $\sum_{\alpha \neq \alpha_0} \sigma_\alpha$ も下半連続である。
- よって $\sigma_{\alpha_0} = 1 - \sum_{\alpha \neq \alpha_0} \sigma_\alpha$ は上半連続。

(2) の証明 • $\{\sigma_\alpha\}_{\alpha \in A}$ を \mathcal{U} に従属する広義の 1 の分割とする。

Step 1 各 $\delta > 0$ に対して、次の開集合族はその和集合 $\cup_{\alpha \in A} V_\alpha^\delta$ の被覆として局所有限であることを示す。

$$(V_\alpha^\delta)_{\alpha \in A}, \quad V_\alpha^\delta = \{x \in X : \sigma_\alpha(x) > \delta\}.$$

- x_0 に対して、 $\sigma_{\alpha_0}(x_0) > \delta > 0$ となる α_0 が存在したとする。
- 有限部分集合 $A' \subset A$ を $x = x_0$ に対して $(1 - \sum_{\alpha \in A'} \sigma_\alpha(x)) < \delta$ となるものとする。
- このとき上の不等式を満たす x 全体は x_0 を含む X の開集合であり、それと $V_{\alpha_0}^\delta$ が共通部分をもてば $\alpha \in A'$ となる。

*1 Michael Mather, Paracompactness and partitions of unity, PhD thesis, Cambridge (1965),

に見られる方法。

ここでは次の論文の議論を組み合わせた。

E. Michael, "A note on paracompact spaces", Proc. Amer. Math. Soc. 4 (1953), 831-838, Proposition 2,

なお次の論文にもこの議論がある。

J.Dydak, "Partitions of unity", Topology Proceedings 27 (2003), 125-171, Corollary 2.13

<http://front.math.ucdavis.edu/math.GN/0210379>

Dydak の論文では 1 の分割を用いて正規空間、パラコンパクト Hausdorff 空間の定式化を与え、それらの性質や被覆次元についての古典的な性質を見通し良く叙述している。

*2 選択公理を使う

Step 2 正值関数 $\sigma_\infty = \sup_{\alpha \in A} \sigma_\alpha$ の連続性を示す。

- 各 $x \in X$ に対して $\sigma_{\alpha_0} > \delta > 0$ となる $\alpha_0 \in A$ と δ をとる。すなわち $x \in V_{\alpha_0}^\delta$
- x の $V_{\alpha_0}^\delta$ における開近傍 U を、 $V_{\alpha_0}^\delta \cap U \neq \emptyset$ となる α の集合 A' が有限であるものをとる。
- このとき、 U 上で $\sigma_{\alpha_0} > \delta$ であり、さらに次が成立する。

$$\sigma_\infty|_U = \sup_{\alpha \in A} \sigma_\alpha|_U = \sup_{\alpha \in A'} \sigma_\alpha|_U.$$

- A' の有限性から右辺は連続関数である。

Step 3 構成を行う。以下の定義を用いて $0 < t' < t < 1$ となる t', t に対して次のようにおく。

$$V_\alpha = V_{\alpha'}^{t'}, \quad \rho_\alpha = \rho_{\alpha'}^t / \rho_\infty, \quad \rho_\infty^t = \sum_{\alpha' \in A} \rho_{\alpha'}^t$$

- ここで $0 < t < 1$ に対して連続関数 ρ_α^t と開集合 $V_{\alpha_0}^t$ を次で定義。

$$\rho_\alpha^t = \max\{0, (\sigma_{\alpha_0}(x) - t\sigma_\infty(x))\}, \quad V_{\alpha_0}^t = \{x \in X : \rho_{\alpha_0}^t(x) > 0\}.$$

- すると次が成立

$$\text{supp}(\rho_\alpha^t) = \overline{V_\alpha^t}, \quad 0 \leq \rho_\alpha^t \leq \sigma_\alpha, \quad V_\alpha^t \subset U_\alpha.$$

- $t' < t$ であれば $\text{supp}(\rho_\alpha^t) \subset V_{\alpha'}^{t'}$.
- よって次を示せば上の構成が求める性質をもつことがわかる。

Step 4 $0 < t < 1$ に対して $\{V_\alpha^t\}_{\alpha \in X}$ は局所有限な被覆である。

- $t < 1$ であるとき、被覆であること $X = \cup_\alpha V_\alpha^t$ は次からわかる：

$$\exists \alpha \in A \quad \rho_\alpha(x_0) > t\rho_\infty(x)$$

- $t > 0$ であるとき、局所有限性は次からわかる。

各 $x_0 \in X$ に対して、 $\rho_{\alpha_0}(x_0) > 0$ となる α_0 と有限部分集合 $A' \subset A$ であって $x = x_0$ に対して不等式 $(1 - \sum_{\alpha \in A'} \rho_\alpha(x)) < t$ を満たすものをとる。

• このとき上の不等式を満たす x 全体は x_0 を含む X の開集合であり、それと $V_{\alpha_0}^t$ が共通部分をもてば $\alpha \in A'$ となる。□

1.2 正規空間、パラコンパクト空間

Definition 7 (正規空間). X が正規であるとは一点集合は閉であり、交わらない閉集合は開集合で分離可能であることをいう。

Definition 8 (パラコンパクト空間). 位相空間 X がパラコンパクトであるとは、任意の開被覆に対して、その細分である開被覆であって、局所有限なものが存在することをいう。

Proposition 9. X がパラコンパクト Hausdorff ならば正規

Proof. 交わらない閉集合 K, L に対して開集合 U, V であって $U \supset K, V \supset L, K \cap L = \emptyset$ となるものの存在を示す。

Step 1 K が一点集合 $\{x_0\}$ の場合.

- L の各点 y に対して開集合 U_y, V_y であって $x_0 \in U_y, y \in V_y, U_y \cap V_y = \emptyset$ となるものをとる。
- $V_\infty = X \setminus L$ とおくと $\{V_y\}_{y \in L} \cup \{V_\infty\}$ は X の開被覆。
- その局所有限な細分開被覆 $\{V_\beta\}_{\beta \in B}$ をとる。
- 各 V_β は、 $\{x_0\}$ と L の一方と共通部分をもてば、他方とはもたない。
- x_0 の開近傍 U_0 であって V_β たちの有限個としかまじわらないものをとる。
- このとき次のようにおけばよい。

$$U = U_0 \setminus \bigcup \{\overline{V_\beta} : \beta \in B, V_\beta \cap U' \neq \emptyset\}, \quad V = \bigcup \{V_\beta : \beta \in B, V_\beta \cap L \neq \emptyset\}$$

Step 2 一般の場合。

- L の各点 y に対して開集合 U_y, V_y であって $K \in U_y, y \in V_y, U_y \cap V_y = \emptyset$ となるものがとれる。
- $V_\infty = X \setminus L$ とおくと $\{V_y\}_{y \in L} \cup \{V_\infty\}$ は X の開被覆。
- その局所有限な細分開被覆 $\{V_\beta\}_{\beta \in B}$ をとる。
- 各 V_β は、 K と L の一方と共通部分をもてば、他方とはもたない。
- 各 $x \in K$ の開近傍 $U_0(x)$ であって V_β たちの有限個としかまじわらないものをとる。
- 各 $x \in K$ の開近傍 U を次のように定義する。

$$U(x) = U_0(x) \setminus \bigcup \{\overline{V_\beta} : \beta \in B, V_\beta \cap U' \neq \emptyset\}$$

- このとき次のようにおけばよい。

$$U = \bigcup_{x \in K} U(x), \quad V = \bigcup \{V_\beta : \beta \in B, V_\beta \cap L \neq \emptyset\}$$

□

2 正規空間とパラコンパクト Hausdorff 空間

Theorem 10. 正規 \iff 任意の有限開被覆に対して従属する 1 の分割が存在

Proof. この被覆をなす開集合の個数が 2 のとき、主張は Urysohn の補題と同値な命題である。

- Urysohn の補題は次の section で証明を与える。
- 右から左はただちにでる。左から右を考える。
- 有限開被覆 $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ が与えられたとする。
- Urysohn の補題から $\rho_\alpha + \sigma_\alpha = 1$ となる連続関数で次をみたすものが存在する。

$$\text{supp}(\rho_\alpha) \subset X \setminus \bigcup_{\alpha \neq \alpha_0} U_\alpha, \quad \text{supp}(\sigma_\alpha) \subset X \setminus U_{\alpha_0}$$

- このとき、 $\prod_{\alpha \in A} \sigma_\alpha = 0$ である。

次の右辺を展開するとき、この 0 になる項以外は、どの項にもある α に対する ρ_α が現れる。

$$1 = \prod_{\alpha} (\rho_\alpha + \sigma_\alpha)$$

- $\rho_\alpha \subset U_\alpha$ であるから、これらの項を適当に分割すると求める 1 の分割を得る。

□

Theorem 11. パラコンパクト Hausdorff \iff 任意の開被覆に対して従属する 1 の分割が存在

これは次の定理からただちにでる。次の定理の証明は次の section であたえる。

Theorem 12. 正規空間 X の開被覆 \mathcal{U} に対して、次は同値：

\mathcal{U} の細分である局所有限開被覆が存在 $\iff \mathcal{U}$ に従属する 1 の分割が存在。

Theorem 13. パラコンパクト Hausdorff であるために、次の各々の性質は十分条件である。

(1) 距離付け可能^{*3}

(2) 閉包がコンパクトである可算個の開集合で被覆される Hausdorff 空間^{*4}

(1) の証明は次の section であたえる。

(2) のみ示す^{*5}。

(2) の証明 ・ $\{W_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を閉包がコンパクトな可算個の開集合からなる被覆とする。

・ $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ を任意の開被覆とする。

・ 各 $x \in X$ に対して次のようにして開近傍 V_x と関数 σ_x を構成する。

・ $x \in W_n$ となる $n \in \mathbb{N}$ と $x \in U_\alpha$ となる $\alpha \in A$ をとる。

・ $\overline{W_n \cap U_\alpha}$ はコンパクト Hausdorff なので正規。

・ $\{x\}$ と $\overline{W_n} \setminus W_n$ とに Urysohn の補題から、 $[0, 1]$ に値をとる連続関数 $\sigma_x : \overline{W_n \cap U_\alpha} \rightarrow [0, 1]$

であって $\sigma_x(x) > 0$ かつ $\text{supp}(\sigma_x) \subset W_n \cap U_\alpha$ となるものが存在する。

・ $\overline{W_n \cap U_\alpha}$ の外にはゼロに延長して σ_x を X 上の関数とみなすと、これは連続。

・ $V_x = \sigma_x^{-1}((0, \infty))$ とおくと $x \in V_x \subset W_n \cap U_\alpha$ である。

・ $\{V_x\}_{x \in X}$ は X の開被覆であり \mathcal{U} の細分である。

・ 各 $n \in \mathbb{N}$ に対してコンパクト集合 $\overline{W_n}$ を覆う有限個の V_x をえらべる。

・ ある n に対してこのようにあらわれる x の全体を $B \subset X$ とおく。

・ B は高々可算集合であり、 $\mathcal{V} = \{V_y\}_{y \in B}$ は X の開被覆であり \mathcal{U} の細分となる。

・ $\{\epsilon_y\}_{y \in B}$ を $\epsilon_y > 0$ かつ $\sum_{y \in B} \epsilon_y < +\infty$ となる高々可算個の正数とする。

・ $\sigma_\infty = \sum_{y \in B} \epsilon_y \sigma_y$ は一様に絶対収束し、よって正值連続関数となる。

・ $\{\sigma_y / \sigma_\infty\}_{y \in B}$ は \mathcal{V} の「広義の 1 の分割」である。

・ よって \mathcal{U} は 1 の分割をもつ。

3 種々の分離可能性を用いた細分の構成

Theorem 14 (Tietze の拡張定理). 正規空間 X の閉集合上の連続関数 f は X 全体に連続関数として拡張できる

実際にはまず次を示す^{*6}。

^{*3}例：ノルム空間の部分集合、その例：Hilbert 空間の開球

^{*4}例：多様体 $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n$ ここで各 $U_n \in \mathcal{O}_X$ は Euclid 空間内のある開集合と同相。各 U_n が閉包がコンパクトである可算個の開集合で被覆される。

^{*5}次の論文の方法による。

J.Dydak, "Partitions of unity", Topology Proceedings 27 (2003), 125-171,

<http://front.math.ucdavis.edu/math.GN/0210379>

^{*6}(2012/1/23) 当初は Theorem 14 のまま以下の議論を適用していたが、そこには誤りがあり (sup, inf が存在しない場合がある) Proposition 15 を経由する必要があることを松澤陽介さんからご指摘いただいた。

Proposition 15. 正規空間 X の閉集合 K 上の $[-1, 1]$ 値連続関数 f は X 全体の $[-1, 1]$ 値連続関数 F に拡張できる。

Remark 16 (Urysohn の補題). ^{*7} ここで閉集合 K が disjoint な閉集合 K_-, K_+ の和集合であり、 $f(x) = -1$ ($x \in K_-$)、 $f(x) = 1$ ($x \in K_+$) である場合が Urysohn の補題である。

Tietze の拡張定理の主張は、

「正規空間 X の閉集合 K 上の $(-1, 1)$ 値連続関数 f は X 全体の $(-1, 1)$ 値連続関数に拡張可能」と同値である。これは次のようにして Proposition 15 に帰着される。

・正規空間 X の閉集合 K 上の $(-1, 1)$ 値連続関数 f が与えられたとき、Proposition 15 によって X 全体の $[-1, 1]$ 値連続関数 F に拡張できる。

・ $L = F^{-1}(\{-1, 1\})$ は X の閉集合であり、 $K \cap L = \emptyset$ である。

・もう一度 Proposition 15 を用いると X 上の $[0, 1]$ 値連続関数 h であって、 $h(K) = 1$, $h(L) = 0$ を満たすものが存在する。

・このとき、積 hf は $(-1, 1)$ 値連続関数であり f の拡張となっている。

まず、正規空間の分離可能性を少し拡張した次の Lemma 17 を用いて Lemma 18 を示す^{*8*9}。

Lemma 17. X は正規空間、 $A, B \subset X$ が次を満たせば A, B はある $U, V \in \mathcal{O}_X$ によって分離可能：

$$A = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} K_n, \quad B = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} L_n, \quad \text{各 } K_n, L_n \text{ は閉。} \quad \forall n \in \mathbf{N} (K_n \cap \bar{B} = \bar{A} \cap L_n = \emptyset)$$

Lemma 17 の証明. ・正規性から $U_n, V_n \in \mathcal{O}_X$ を次のようにとれる。

$$U_n \supset K_n, \quad \bar{U}_n \cap \bar{B} = \emptyset, \quad V_n \supset L_n, \quad \bar{V}_n \cap \bar{A} = \emptyset.$$

・このとき次のようにおけばよい : $U = \bigcup_n (U_n \setminus (\bigcup_{i \leq n} \bar{V}_i))$, $V = \bigcup_n (V_n \setminus (\bigcup_{i \leq n} \bar{U}_i))$ □

Lemma 18. K は正規空間 X の閉集合、 $f : K \rightarrow [-1, 1]$ は連続関数、 Γ は $(-1, 1)$ の可算部分集合 \implies 開集合族 $(U_r)_{r \in \Gamma}, (V_r)_{r \in \Gamma}$ であって、各 $t \in \Gamma$ に対して次の (1)(2) を満たし、かつ $s < r$ となる各々の $s, r \in \Gamma$ に対して次の (3) を満たすものが存在する。

^{*7}歴史についての注 1 : 「Tietze の拡張定理」を証明したのは Urysohn である。Urysohn は、拡張定理、距離付け定理の 2 論文が Math. Ann. で出版される前年、1924 年 8 月に 26 歳で亡くなった。「拡張定理」は 1907 年に Hausdorff が 2 次元 Euclid 空間内で付帯条件のもとに示し、1915 年に Tietze が一般の Euclid 空間、さらに (Hahn からの質問への応答として) 距離空間の場合に示していた (いずれも実解析上の動機による)。

In [1923], Tietze defines normal spaces, and in [1925] Urysohn proves the final possible generalization of Theorem 1 (= 距離空間に対する「拡張定理」) with respect to spaces M , real-valued functions and closed subsets. (...) His well-known method of the proof differs from the previous ones and gets the extension as a sum of a uniformly convergent series of functions. In many books, the Urysohn's result is described as Tietze theorem, but Tietze made no attempt to prove it in his paper, and it does not follow from his methods. (...)

(M. Husěk "History and development of Hausdorff's work in extension in metric spaces" Recent Development of General Topology and its Applications, Math. Research 67 (Akademie-Verlag, Berlin 1992), pp. 160-169.

<http://www.karlin.mff.cuni.cz/~mhusek/mirek-pb.htm>)

歴史についての注 2 : 後で紹介する証明は「uniformly convergent series of function」を用いるものではなく、1998 年の E. Ossa の論文の方法に近い。拡張定理が初めて証明されてから 70 年以上の間に、いくつかの別証、いくつかの方向への拡張等が経過もあった。(例 : 「uniformly convergent series of function」の方法を用いると、「パラコンパクト空間の閉集合から Banach 空間への連続写像は連続写像として全体に拡張可能」が証明される。) 新しい別証では「Urysohn の補題」の証明の方法を利用して拡張定理が直接示される。一般に、新しい方法の発見は新しい可能性を開く。実際、他の研究者による 2009 年の論文で、この新しい別証の議論を用いて上半連続多値関数に対する拡張定理を扱うものがあるようだ (Y. Askoura, Int. Journal of Math. Analysis, 3, 2009)。

^{*8}Urysohn の補題だけのためには Lemma 17 は不要。

^{*9}下の議論を参考にした (Ossa の論文では Lemma 17 よりも簡単な補題を用いており証明全体もより短い)。

M. Mandelkern, "A short proof of the Tietze-Urysohn Extension Theorem", Arch. Math. (Basel) 60 (1993), 364-366, <http://www.springerlink.com/content/1r33434013r37272/>

E. Ossa, "A simple proof of the Tietze-Urysohn extension theorem", Arch. Math. 71 (1998) 331-332, <http://www.springerlink.com/content/6x6u294jq39616cf/>

- (1) $f^{-1}([-1, t]) \subset U_t \cap K$
- (2) $f^{-1}((t, 1]) \subset V_t \cap K$
- (3) $U_s \subset (X \setminus V_s) \subset U_r \subset (X \setminus V_r)$

Lemma 18 の証明. $\Gamma = \{r_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ とする。

- n より小さな \mathbb{N} の元に対しては、それらの間で (1)(2)(3) が成立するように構成されたとする。
- 次の A, B は Lemma 17 の仮定を満たす。
- $A = f^{-1}((-\infty, r_n)) \cup (\cup_{m < n, r_m < r_n} (X \setminus U_{r_m}))$, $B = f^{-1}((r_n, +\infty)) \cup (\cup_{m < n, r_m > r_n} (X \setminus V_{r_m}))$.
- それらを分離する開集合を U_{r_n}, V_{r_n} とおけば帰納法が進行する。 \square

Tietze の拡張定理の弱い形 Proposition 15 の証明. Lemma 18 の状況において次の 2 つの関数 $F_0, F_1 : X \rightarrow [0, 1]$ を考える。

$$F_0(x) = \sup\{s \in \Gamma \mid x \in V_s\}, \quad F_1(x) = \inf\{r \in \Gamma \mid x \in U_r\}$$

- このとき各 $x \in X$ に対して $F_0(x) \leq F_1(x)$ である
- \therefore If $\exists r \in \Gamma (F_1(x) > r > F_0(x)) \implies (x \in V_r \cap U_r) \implies V_r \cap U_r = \emptyset$ と矛盾。
- 开区間 $(F_0(x), F_1(x))$ に属する Γ の要素は高々一個である。
- \therefore If $\exists s, r \in \Gamma (F_0(x) < s < r < F_1(x)) \implies ((x \notin V_s) \wedge (x \notin U_r)) \implies V_s \cup U_r = X$ と矛盾。
- F_0 は下半連続 $\therefore F_0^{-1}((s_0, 1]) = \cup_{s > s_0} V_s$
- F_1 は上半連続 $\therefore F_1^{-1}([-1, r_0)) = \cup_{r < r_0} U_r$
- よって Γ を \mathbb{R} の中で稠密にとるとき、 $F_0 = F_1$ となり、これは連続。
- Γ の稠密性の下で F_0, F_1 の定義からさらに $F_0|_K = F_1|_K = f$ 。

\square

Remark 19. Γ が可算順序集合であり、 $s < r$ のとき $s < t < r$ となる t が存在し、最大元、最小元を持たないとする。このとき Γ は \mathbb{Q} と同じ順序型をもつ。 Γ から「Dedekind の切断」によって構成される順序集合は \mathbb{R} と同じ順序型をもつ。

Theorem 20. 正規空間の局所有限開被覆は 1 の分割をもつ。

次の Lemma 21 を用いる。

Lemma 21 (Lemma 21). 正規空間 X の開被覆 $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ に対して、ある閉集合族 $(K_\alpha)_{\alpha \in A}$ が存在し次の (1)(2)(3) を満たせば $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ に従属する 1 の分割が存在する：

- (1) $K_\alpha \subset U_\alpha$
- (2) $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ は局所有限な開集合族,
- (3) $W_\alpha = \text{int}(K_\alpha)$ とおくと $X = \cup_\alpha W_\alpha$

Lemma 21 の証明. この Lemma の仮定は、与えられた開被覆を少し縮めた新しい開被覆の存在を意味する。

- Urysohn の補題から連続関数 $\rho_\alpha : X \rightarrow [0, \infty)$ であって $\rho_\alpha|_{K_\alpha} = 1$ かつ $\rho_\alpha|_{X \setminus U_\alpha} = 0$ となるものをとる^{*10}。
- $\rho = \sum_\alpha \rho_\alpha$ は (U_α) の局所有限性から収束し連続関数である。
- $X = \cup_\alpha K_\alpha$ であるから $\rho > 0$ となる。
- $\rho'_\alpha = \rho_\alpha / \rho$ は求める 1 の分割を与える。 \square

^{*10}なお、 X が距離空間の場合には、 $K \subset U$ を満たす閉集合 K と開集合 U に対して $\rho(x) = d(x, X \setminus U) / (d(x, K) + d(x, X \setminus U))$ は K 上で 1 をとり U の外で 0 となる連続関数である。この場合は 1 の分割を具体的に書くことができる。

Theorem 20 の証明. 正規空間 X の任意の局所有限開被覆 $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ が Lemma 21 の条件を満たすことを以下示す。

- 以下の条件をみたす $(B, (K_\beta)_{\beta \in B})$ の全体を Ω とおく。
 - $B \subset A$
 - $(K_\beta)_{\beta \in B}$ は $K_\beta \subset U_\beta$ をみたす閉集合族。
 - $(\cup_{\beta \in B} \text{int}(K_\beta)) \cup (\cup_{\alpha \in A \setminus B} U_\alpha) = X$
- Ω の順序構造を次で導入： $(V_\beta)_{\beta \in B} \leq (W_\gamma)_{\gamma \in C} \iff (B \subset C \wedge \forall (\beta \in B (V_\beta = W_\beta)))$
- Zorn の補題を使いたい： (U_α) の局所有限性から (Ω, \leq) は帰納的である。
- $(B, (K_\beta)_{\beta \in B}) \in \Omega$ が極大元なら $B = A$ となり、Lemma 21 の仮定が成立。
- 実際、もし $\alpha_0 \in A \setminus B$ なら次の $(C, (L_\gamma)_{\gamma \in C})_{\gamma \in C}$ はそれより真に大きくなる。
 - $C = B \cup \{\alpha_0\}$,
 - $L_\beta = K_\beta$ ($\beta \in B$)、
 - L_{α_0} は次の条件 (*) を満たす L' とする：

(*) 閉集合 $L = X \setminus ((\cup_{\beta \in B} \text{int}(K_\beta)) \cup (\cup_{\alpha \in A \setminus C} U_\alpha))$ は開集合 U_{α_0} に含まれる。 X は正規空間なのである閉集合 L' であって $L \subset \text{int}(L') \subset L' \subset U_{\alpha_0}$ となるものが存在する。

□

Theorem 22 (Stone). ^{*11} 距離空間の任意の開被覆は 1 の分割をもつ

2通りの証明を紹介する。いずれにおいても「広義の 1 の分割」を構成する。すると Proposition 6 から、1 の分割が存在する。

• 第一の証明では、上の議論と同様に、ある種の「分離性」を Lemma として準備し、主張の前提のもとで Lemma の仮定が満たされることを示す。

• 第二の証明は、「広義の 1 の分割」をより直接的に構成する。

• 概念的に述べるなら、第二の証明の中の途中であらわれる連続関数の等高線は、第一の証明に事実上あらわれる諸集合を分離している。

第一の証明 次の Lemma を用いる。

Lemma 23. 正規空間 X の開被覆 $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ に対して、ある閉集合族 $(K_\alpha^n)_{\alpha \in A, n \in \mathbb{N}}$ および開集合族 $(U_\alpha^n)_{\alpha \in A, n \in \mathbb{N}}$ が存在し次の条件を満たせば $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ に従属する「広義の 1 の分割」が存在する：

- $K_\alpha^n \subset U_\alpha^n \subset U_\alpha$
- 各 n について $(U_\alpha^n)_{\alpha \in A}$ は disjoint な開集合族,
- $X = \cup_{\alpha, n} K_\alpha^n$

Lemma 23 の証明. $\sum_n \epsilon_n < \infty$ となる可算個の正数 $\epsilon_n > 0$ の族 $(\epsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ をひとつ取って固定する。

- Urysohn の補題から連続な $\rho_\alpha^n : X \rightarrow [0, \epsilon_n]$ であって $\rho_\alpha^n|_{K_\alpha^n} = \epsilon_n$ かつ $\rho_\alpha^n|_{X \setminus U_\alpha^n} = 0$ となるものをとる。
- $\rho^n = \sum_\alpha \rho_\alpha^n$ は $0 \leq \rho^n \leq \epsilon_n$ を満たす連続関数である。
- よって $\rho = \sum_n \rho^n$ は一様に絶対収束し連続関数である。
- $X = \cup_{\alpha, n} K_\alpha^n$ であるから $\rho > 0$ となる。
- $\rho_\alpha = (\sum_n \rho_\alpha^n) / \rho$ は求める一様な絶対収束から連続であり、「広義の 1 の分割」を与える。

□

^{*11}A.H. Stone (1948) 「距離空間はパラコンパクト」A. H. Stone, Paracompactness and product spaces, Bull. Amer. Math. Soc. 54 (1948), 977-982

Theorem 22 の第一の証明. 距離空間 (X, d) の任意の開被覆 $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ が Lemma の条件を満たすことを以下示す.

- $(\delta_n)_{n \in \mathbf{N}}$ を下限が 0 であるような可算個の正数 $\delta_n > 0$ の族とし、これを固定する。
- 以下の条件をみたす $(B, (K_\beta^n)_{\beta \in B, n \in \mathbf{N}}, (U_\beta^n)_{\beta \in B, n \in \mathbf{N}})$ の全体を Ω とおく。
 - $B \subset A$, $(K_\beta^n)_{\beta \in B, n \in \mathbf{N}}$ は閉集合族、 $(U_\beta^n)_{\beta \in B, n \in \mathbf{N}}$ は開集合族。
 - $K_\beta^n \subset U_\beta^n \subset U_\beta$, $d(U_\beta^n, X \setminus U_\beta) \geq \delta_n$
 - 各 n について $(U_\beta^n)_\beta$ は disjoint な開集合族であり、 $\cup_{\beta \in B} U_\beta = \cup_{\beta \in B, n \in \mathbf{N}} K_\beta^n$
- Ω の順序構造を次で導入。
$$(B, (K_\beta^n)_{\beta \in B, n \in \mathbf{N}}, (U_\beta^n)_{\beta \in B, n \in \mathbf{N}}) \leq (C, (L_\gamma^n)_{\gamma \in C, n \in \mathbf{N}}, (V_\gamma^n)_{\gamma \in C, n \in \mathbf{N}})$$

$$\iff ((B \subset C) \wedge (\forall \beta \in B \forall n \in \mathbf{N} (K_\beta^n = L_\beta^n) \wedge (U_\beta^n = V_\beta^n)))$$
- (Ω, \leq) は空でない帰納的集合であり、Zorn の補題から極大元が存在。
- $(B, (K_\beta^n)_{\beta \in B, n \in \mathbf{N}}, (U_\beta^n)_{\beta \in B, n \in \mathbf{N}}) \in \Omega$ が極大元なら $B = A$ となり、Lemma の仮定が成立。
- 実際、もし $\alpha_0 \in A \setminus B$ なら次の $(C, (L_\gamma^n)_{\gamma \in C, n \in \mathbf{N}}, (V_\gamma^n)_{\gamma \in C, n \in \mathbf{N}})$ はそれより真に大きくなる。
 - $C = B \cup \{\alpha_0\}$, $L_\beta^n = K_\beta^n$ ($\beta \in B$), $V_\beta^n = U_\beta^n$ ($\beta \in B$)
 - $L_{\alpha_0}^n = \{x \in X \mid d(x, X \setminus U_{\alpha_0}) \geq 2\delta_n, d(x, X \setminus \cup_{\beta \in B} U_\beta) = 0\}$
 - $V_{\alpha_0}^n = \{x \in X \mid d(x, X \setminus U_{\alpha_0}) > \delta_n, d(x, X \setminus \cup_{\beta \in B} U_\beta) < \delta_n\}$ □

第二の証明 次の Lemma を用いる

Lemma 24. X の開被覆 $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ に対し、であって次をみたす非負の連続関数の族 $\{\sigma_\alpha\}_{\alpha \in A}$ が存在するとき \mathcal{U} に従属する広義の 1 の分割が存在する :

- $\sigma_\alpha|_{X \setminus U_\alpha} = 0$.
- $\forall x \in X \exists \alpha \in A \sigma_\alpha(x) > 0$.
- 任意の $B \subset A$ に対して $\sigma_B = \sup_{\beta \in B} \sigma_\beta$ は各点で収束し、連続関数。

Lemma 24 の証明. • 集合 Ω を $B \subset A$ と X 上の非負連続関数族 $\{\rho_\beta\}_{\beta \in B}$ とのペアであって次をみたすもの全体の集合とする :

$$0 \leq \rho_\beta \leq \sigma_\beta, \quad \sum_{\beta \in B} \rho_\beta = \sigma_B$$

- Ω 上の順序を B の包含関係と、関数族の制限によって自然に定める。
- もし $(A, \{\rho_\alpha\}_{\alpha \in A}) \in \Omega$ なら、 $\{\rho_\alpha/\sigma_\alpha\}_{\alpha \in A}$ は $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ に従属する「広義の 1 の分割」である。
- Ω は帰納的である。
- あとは極大元 $(B, \{\rho_\beta\}_{\beta \in B})$ に対して $B = A$ を示せば証明は終わる。
- 仮に $\alpha_0 \in A \setminus B$ であるとする。
- $B' = B \cup \{\alpha_0\}$ とおくと $\sigma_{B'} = \max\{\sigma_B, \sigma_{\alpha_0}\} \geq \sigma_B$ である。
- このとき $\rho_{\alpha_0} = \sigma_{B'} - \sigma_B \geq 0$ とおけば $(B', \{\rho_{\beta'}\}_{\beta' \in B'}) \in \Omega$
- これは極大性に反して矛盾である。 □

Theorem 22 の第二の証明. 距離空間の開被覆が Lemma 24 の仮定を満たすことを確かめる。

- $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ を距離空間 (X, d) の開被覆とする。
- 連続関数 $\sigma_\alpha : X \rightarrow [0, 1]$ を次で定める : $\sigma_\alpha(x) = \min\{d(x, X \setminus U_\alpha), 1\}$.
- $\{\sigma_\alpha\}_{\alpha \in A}$ は次から同程度連続である : $|\sigma_\alpha(x) - \sigma_\alpha(y)| \leq d(x, y)$.
- 任意の部分集合 $B \subset A$ に対して $\sigma_B = \sup_{\beta \in B} \sigma_\beta$ とおくと正值。
- σ_B は関数族 $\{\sigma_\beta\}_{\beta \in B}$ の同程度連続性から連続である。 □

Remark 25. Stone の定理の第一の証明と第二の証明は Zorn の補題を使う場所が形式的に違うが、内容は平行である。実際、次のふたつが平行な位置にある。

$$\bigcup_{\beta \in B} U_\beta = \bigcup_{\beta \in B, n \in \mathbb{N}} K_\beta^n \quad (\iff) \quad \sup_{\beta \in B} \sigma_\beta = \sum_{\beta \in B} \rho_\beta$$

Remark 26. 第一の証明は、本質的に Rudin による議論^{*12} を、超限帰納法のかわりに Zorn の補題を用い、Theorem 20 の証明と平行した形に記述しなおしたものである。第二の証明は Mather による証明^{*13} の議論を、やはり超限帰納法のかわりに Zorn の補題を用いて記述したものである^{*14}。

4 第二可算公理、「滑らかな」1 の分割

Euclid 空間、可分 Hilbert 空間の部分集合上の関数には「滑らかな関数」の概念がある^{*15}。これらの場合には 1 の分割を滑らかな関数にとることができる。これは次の一般的な原理から従う。次の条件をみたす $X, \mathcal{F}, \{(U_n, V_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ が与えられたとする^{*16}。

1. X は第二可算公理をみたす位相空間
2. $\{(U_n, V_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ は可算個の開集合のペアの族であって次を満たすもの
 - (a) $\overline{V_n} \subset U_n$.
 - (b) 任意の点 x の任意の開近傍 U に対して、ある $n \in \mathbb{N}$ が存在し、 $x \in V_n \subset \overline{U_n} \subset U$.
3. \mathcal{F} は X 上の連続関数の族であって次をみたすもの。
 - (a) 各 $n \in \mathbb{N}$ に対してある $f_n, g_n \in \mathcal{F}$ が存在し、

$$f_n|_{U_n} > 0, \quad f_n|_{X \setminus U_n} = 0, \quad g_n|_{\overline{V_n}} = 0, \quad g_n|_{X \setminus \overline{V_n}} > 0.$$
 - (b) $f, g \in \mathcal{F}$ であるとき $fg \in \mathcal{F}$. またさらに $g > 0$ であるとき $f/g \in \mathcal{F}$.
 - (c) $\Gamma \subset \mathcal{F}$ に対して、 $\{\text{supp}(h)\}_{h \in \Gamma}$ が局所有限であるとき、 $\sum_{h \in \Gamma} h \in \mathcal{F}$.

Theorem 27. ^{*17}

$X, \mathcal{F}, \{(U_n, V_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ が上の条件を満たすとき、任意の開被覆に対して、それに従属する 1 の分割であって、 \mathcal{F} の元からなるものが存在する。

^{*12}M.E. Rudin, "A new proof that metric spaces are paracompact", Proc. Amer. Math. Soc., V20, No. 2. (1969), p. 603. <http://www.ams.org/journals/proc/1969-020-02/>

^{*13}Michael Mather, Paracompactness and partitions of unity, PhD thesis, Cambridge (1965).

^{*14}次に歴史的経緯についての言及が少しある。

A. Fathi, "Partitions of Unity for Countable Covers", Amer. Math. Monthly, 104,(1997), 720?723, <http://www.jstor.org/pss/2975235>

なお、Jerzy Dydak, Partitions of unity, Top. Proc. 27, (2003), 125-171 <http://arxiv.org/abs/math.GN/0210379>

でも同じ方法で証明されているが Mather は引用されていない。おそらく Mather の議論を知らずに再発見したものと思われる。

^{*15} C^∞ 多様体上でもそうである

^{*16}このような実は X は距離付け可能である

^{*17}よく知られた方法と思われるが、調べていないため初出不明。

Proof. $\cdot \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ を開被覆とする。

- 各 $n \in \Gamma$ に対して上の条件の中の $f_n, g_n \in \mathcal{F}$ をとる。
- $\Gamma \subset \mathbb{N}$ をある $\alpha \in A$ に対して $\overline{U_n} \subset U_\alpha$ となる n の全体とすると $\bigcup_{n \in \Gamma} V_n = X$.
- $n \in \Gamma$ に対して, 開集合 W_n と $h_n \in \mathcal{F}$ を次で定義する。

$$W_n = U_n \setminus \bigcup_{m \in \Gamma, m < n} \overline{V_m}, \quad h_n = f_n \prod_{m \in \Gamma, m < n} g_m$$

• このとき

$$\bigcup_{m \in \Gamma, m < n} W_m = \bigcup_{m \in \Gamma, m < n} U_m, \quad h_n|_{W_n} > 0, \quad h_n|_{X \setminus W_n} = 0$$

- $n \in \Gamma$ に対して: $\overline{W_n} \subset \overline{U_n} \setminus \bigcup_{m \in \Gamma, m < n} V_m$.
- これから次が成立: $m, n \in \Gamma, \quad m < n \implies \overline{W_n} \cap V_m = \emptyset$.
- 特に, $X = \bigcup_{m \in \Gamma} V_m$ に注意すると, $\{\text{supp}(h_n)\}_{n \in \Gamma} = \{\overline{W_n}\}_{n \in \Gamma}$ は局所有限。
- $\sigma_\infty = \sum_{n \in \Gamma} h_n$ とおくと, $\{\text{supp}(h_n)\}_{n \in \Gamma}$ の局所有限性から $\sigma_\infty \in \mathcal{F}$.
- 次から $\sigma_\infty > 0$ がわかる。

$$\sigma_\infty^{-1}(0, \infty) = \bigcup_{n \in \Gamma} g_n^{-1}(0, \infty) = \bigcup_{n \in \Gamma} W_n = \bigcup_{n \in \Gamma} U_n = X.$$

- 写像 $\phi: \Gamma \rightarrow A$ を $\overline{U_n} \subset U_{\phi(n)}$ となるものとし^{*18}, $\Gamma_\alpha = \{n \in \Gamma : \phi(n) = \alpha\}$ とおく。
- $\sigma_\alpha = \sum_{n \in \Gamma_\alpha} h_n$ とおくと同様に $\sigma_\alpha \in \mathcal{F}$.
- $\text{supp}(\sigma_\alpha)$ は下の最左辺の閉包である:

$$\sigma_\alpha^{-1}(0, \infty) = \bigcup_{n \in \Gamma_\alpha} h_n^{-1}(0, \infty) \subset \bigcup_{n \in \Gamma_\alpha} \text{supp}(h_n) = \bigcup_{n \in \Gamma_\alpha} \overline{W_n}.$$

- $\{\overline{W_n}\}_{n \in \Gamma_\alpha}$ は局所有限な閉集合族なのでそれらの和集合はふたたび閉集合である。よって

$$\text{supp}(\sigma_\alpha) \subset \bigcup_{n \in \Gamma_\alpha} \overline{W_n} \subset \bigcup_{n \in \Gamma_\alpha} \overline{U_n} \subset U_\alpha.$$

- 特に, $\{\overline{W_n}\}_{n \in \Gamma}$ の局所有限性から $\{\text{supp}(\sigma_\alpha)\}$ も局所有限である。
- $\rho_\alpha = \sigma_\alpha / \sigma_\infty$ は \mathcal{F} の元であり, $\{\rho_\alpha\}_{\alpha \in A}$ は $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ に従属する求める 1 の分割である。 \square

Remark 28. 上の議論は、距離空間上で 1 の分割を構成する *Mather* の方法 (「第二の証明」) と平行である^{*19}。各々の議論に現れる次のふたつの関係式は議論における役割はほぼ平行である。

$$\bigcup_{m \in \Gamma, m < n} W_m = \bigcup_{m \in \Gamma, m < n} U_m, \quad (\iff) \quad \sum_{\beta \in B} \rho_\beta = \sup_{\beta \in B} \sigma_\beta$$

これから多様体にたいしてなめらかな 1 の分割の存在が次のように示せる。

Lemma 29. X が、Hausdorff であり可算個の開集合からなる開被覆 $X = \bigcup_\alpha U_\alpha$ と同相写像 $f_\alpha: U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$ であって、写像 $f_\alpha \circ f_\beta^{-1}: f_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow f_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ がすべてなめらかであるものが与えられたとする^{*20}。 \mathcal{F} を任意の α に対して f_α^{-1} との合成がなめらかであるような X 上の関数全体とする^{*21}。このとき、ある $\{(U_n, V_n)_{n \in \mathbb{N}}\}$ が存在し、 \mathcal{F} は *Theorem 27* の仮定をみたす。

^{*18} 選択公理を使う

^{*19} 超限帰納法で書くとそれは明らかに見て取れるが、Zorn の補題によって書くと構造が見えにくい。

^{*20} これは X が「パラコンパクト Hausdorff 可分 C^∞ 多様体」であることと同値な条件である。

^{*21} 要するに、多様体 X 上のなめらかな関数全体である

Proof. 可算稠密部分集合の $S \subset \mathbf{R}^n$ に対して次の $\{(U_{\alpha,a,r}, V_{\alpha,a,r})\}_{\alpha \in A, a \in S, r \in \mathbf{Q}_+}$ が求める性質をもつ^{*22}.
 $U_{\alpha,a,r} = \{x \in U_\alpha \mid d(f_\alpha(x), a) < 2r\}, \quad V_{\alpha,a,r} = \{x \in U_\alpha \mid d(f_\alpha(x), a) < r\}$ \square

Example 30. パラコンパクト Hausdorff 可分 C^∞ 多様体の開被覆は C^∞ 級の 1 の分割をもつ。

他の例のために、少し準備をする。

$\varphi : \mathbf{R} \rightarrow [0, 1]$ ををみたす滑らかな関数とする： $\varphi(x) > 0 (\forall x > 0), \quad \varphi(x) = 0 (\forall x \leq 0)$.

(X, d) を距離空間とする。 $p > 0$ を正数とする。 X の上の連続関数からなる族 \mathcal{F} に対する、 p に依存する、次の条件を $C(p)$ とおく。

$C(p)$ 任意の点 x_0 と正数 $r > 0$ に対して X 上の次の 2 つの連続関数は \mathcal{F} に属する。

$$x \mapsto \varphi(d(x, x_0)^p - r), \quad x \mapsto \varphi(r - d(x, x_0)^p)$$

Lemma 31. (X, d) が可分な距離空間であり \mathcal{F} は連続関数からなるある族であり、積、商、局所有限部分族の和について閉じているものとする。 \mathcal{F} がある $p > 0$ に対して $C(p)$ を満たすとき、ある $\{(U_n, V_n)_{n \in \mathbf{N}}\}$ が存在し、 \mathcal{F} は Theorem 27 の仮定をみたす。

Proof. 可算稠密部分集合 $S \subset X$ に対して次の $\{(U_{a,r}, V_{a,r})\}_{a \in S, r \in \mathbf{Q}_+}$ が求める性質をもつ。
 $U_{a,r} = \{x : d(x, a) < 2r\}, \quad V_{a,r} = \{x : d(x, a) < r\}$ \square

Example 32. Banach 空間 ℓ^p に対して、Fréchet 微分の意味でなめらかな関数全体を \mathcal{F} とおく。このとき p が正の偶数のとき ℓ^p は条件 $C(p)$ をみたす。よって p が正の偶数のとき ℓ^p の任意の開被覆はなめらかな 1 の分割をもつ。

$\therefore p$ が正の偶数 $2n$ に等しいのとき $|x| \mapsto |x|^{2n}$ は C^∞ 級関数である。

Example 33. Banach 空間 ℓ^p に対して、Fréchet 微分の意味で C^r 級関数全体を \mathcal{F} とおく。このとき $r < p$ のとき ℓ^p は条件 $C(p)$ をみたす。よって $r < p$ のとき ℓ^p の任意の開被覆は C^r 級の 1 の分割をもつ。

$\therefore r < p$ のとき $|x| \mapsto |x|^p$ は C^r 級関数である。

5 Zorn の補題と超限帰納法について

このノートでは超限帰納法を用いた記述のかわりに Zorn の補題を用いた記述を採用した。両者の記述方法は一般的に互いに変換し得る。

だが、状況を把握するために、一方が他方よりわかりやすい場合があると思われる。

1. Tietze の拡張定理の証明に使った Lemma 1 の、footnote に記した証明、あるいは Remark に述べた、多様体上の滑らかな 1 の分割の存在の議論では、与えられたデータをパラメトライズする N の自然数としての順序^{*23}を本質的に使っている。
2. Tychonoff の定理の様々な証明を、有限個の積の場合に考えてみる。Alexander's subbase lemma を用いる証明は、有限個の成分の順序と無関係に、記述できる。集積点を成分ごとに順番にみつける証明も、順序にはとくに意味がないように思われる。

^{*22} \mathbf{Q}_+ を正の有理数全体とする。

^{*23} すなわち任意の元に対して、それより小さな元の個数が有限になる整列順序。

上の状況の違いは有限個、あるいは可算個でない場合にも次のように説明されると思われる。
次の状況を考える。

1. 証明に使われる帰納的集合 Ω が、ある集合 A に対して A のベキ集合 $P(A)$ への順序をたもつ写像 $f : \Omega \rightarrow P(A)$ をもつ。
2. $B \subset A$ と $P(A)$ の整列部分集合 S であって「 B を最大元とする極大なもの」が与えられたとする。
3. このとき、 Ω の整列部分集合 \tilde{S} であって f が \tilde{S} から S への全単射を与えるものが存在する。

上のとき \tilde{S} を「 S の持ち上げ」とよぶことにする。

多くの状況がこのようになっている。ここで次の問を考える。

問 : $p \in \Omega$ を固定する。 $f(p)$ を最大元とする極大な整列集合 S が任意に与えられたとき、 S のリフト \tilde{S} であって最大元が p であるものが存在するか？

この問は、yes の場合もあれば no の場合もある。

1. "Yes" の場合には、整列部分集合 S を隠した Zorn の補題を用いた記述が状況を見やすい^{*24}。
2. "No" の場合には、整列部分集合 S を隠しても、実は個々の極大元の中に S の可能性の情報が内在している。このときは超限帰納法による記述が、状況を見やすい^{*25}。

Tychonoff の定理の証明で使われる Zorn の補題についてはほとんどの場合 "yes" である。

一方このノートで使われた Zorn の補題は、正規空間の局所有限開被覆に対する 1 の分割の存在証明では "yes" であり、距離空間の開被覆に対する広義の 1 の分割の存在証明では "no" である。

^{*24}"Yes" の場合に整列順序を A にいれて超限帰納法を用いると、実際の構成に不必要な構造を持ち込むことになる

^{*25}多くの人を経験しているであろうが、"no" であると判明する場合、証明は超限帰納法によって構成を発想するほうが素直で作りやすい：これまで作ったものを使ってどう次のものを作るか。