大学院で幾何の勉強を目指す
学部生の方たちへ

平成 18 年 4 月 12 日

1　講義と演習

（1）大学の講義は最大限活用する．わからないことを教員に質問する．

（2）演習は，多数の問題に取り組むことよりも，往々にして，ひとつの問題をじっくり考えて最終結果に到達することのほうが望ましい．

2　幾何の自習

2.1　本を読む

1 冊の本，ひとつの文献を最初から最後までつぶさに読みとおす.（目の前が明るく，一点の隈もない状態にする．これは力がつく.）

2.2　耳学問

図書館でいろんな本があることを実感としてしっておく.

同級生や先輩と話をして耳学問で学ぶ．また，そのような場面で人に自分がわかっているつもりのことを説明できるようにする.

「数学セミナー」「数学のたのしみ」「数理科学」「数学」などの雑誌に目をとおす.

2.3　本を閉じ，基本的な定理の証明を自力で書いてみる．

- 学部 1，2 年

  中間値の定理の証明 （実数の性質の何が本質的か.）

  R^n の 1 次独立なベクトルの個数が n 以下であること.（命題を行列の性質として言いかえるとどうなるか.）

- 学部３，４年 幾何学専攻

  閉多様体が Euclid 空間に埋め込めることの証明.

  Cartan の公式 （Lie 微分，外微分，内部微分の定義に戻って示す.）

  Bianchi の恒等式 （曲率の定義を用いて.）

2.4　少し長い本の証明の議論をステップに分けてノートにまとめる．場合によっては複数の議論，証明を比較する．

- 学部１，２年

  Taylor の定理の証明 （剰余項の形として，複数考える.）

  陰函数定理，逆函数定理の証明 （次元についての帰納法と，逐次近似による二通りの証明を比較する.）

- 学部３，４年 幾何学専攻

  Sard の定理の証明（Milnor 微分トポロジー講義の議論）

  同境群の計算 （Thom の議論）

3　セミナー

3.1　方針

（１）「全てを自分で納得している」という状態を目指すこと．自他に対するごまかしは厳禁．文献は，一語一句，文字通り，掛け値なしに，全てを，きちんと，読むこと．すべての出発点．これができるかできないかが数学を学べるかどうかのひとつの分かれ目.

（２）セミナーでは「証明の紹介」を核と考える．概念構成や定義は，それにいたる準備と考える．セミナーによって数学的腕力がつくためのひとつの要所は，証明の説明を指導教員と共にたどる場面の積み重ねである.

（３）「非自明であるが最も簡単な例」を見つけることが大切．研究において，問題を見つけることはこの訓練の延長上にある.

（４）「わかっていることとわかっていないことの境目」を見出すことが大切．研究において，力の注ぎ所を見つけることはこの訓練の延長上にある.

3.2　やるといいと思われること

（１）図を使う．図式を使う，

（２）例を挙げること.

（３）他から引用するときには，引用する命題を明確に切り出して提示する.

3.3　やらないほうがいいと思われること

（1）大体こうなっている，という不正確な説明を長々と続けること.（概要の説明はむしろ望ましい.）

（2）説明の精度をひとつの話の中で変えること.（引用はかまわない.）

（3）自分で納得してはいないが，きっとこれが根拠に違いないと状況証拠から思われることを他者に対して説明すること.（自分の言葉を一語一句かみ締めながら話すのが望ましい．当然，他者の言葉もそのようにして聞くのが望ましい.）

3.4　プレゼンテーション

（1）セミナーでは言葉と黒板の両方とも使って説明する.

（2）ひとつひとつの文をはっきり述べる.（語尾を曖昧にしない.）

（3）黒板には仮定，前提からしっかり書く.

（4）質問をきくときは，その質問をよくきき，Yes,No で答えられることはできるだけまず最初にそれを述べる.

4　目安となる到達点

4.1　位相

（1）R^2 上で，Euclid 距離についての距離空間の位相と，$R2$ 個の直積位相とが一致することを定義に戻って確かめる.

4.2　多様体

（1）多様体の例を１０通り以上あげよ.（S^n 等名前がついているものはまとめてひとつと数える.）

（2）Lie 群の例を５通り以上あげよ．（$U(n)$ 等名前がついているものはまとめてひとつと数える.）

（3）多様体から別の多様体を作るやり方は？

open subset, 積，連結和，切り貼り（4）RP^2, RP^3 の向き付け可能性を定義に戻って決定する.

4.3　接ベクトル

（1）写像の微分：CP^3 内の $x^3+y^3+z^3-axyz0$ であらわされる部分集合 C_a は部分多様体か．C_a から CP^1 への写像 $[x,y,z]\to[x,y]$ の臨界点はい

くつあるか．

（２）T^2 上のいたるところ 0 にならないベクトル場が与えられたとする．T^2 に埋めこまれた S^1 であって，このベクトル場と常に横断的であるものが存在する．（あまりいい問題ではない？）

4.4　位相空間の区別の仕方

（１）一点，R, R^2, R^3 コンパクトか？ 連結か？（あるいはどの一点を除いても連結か？）

（２） S^2, RP^2, T^2, $S^1 \vee S^1$ 基本群は何か？

（３） 例として思い浮かぶ位相空間のホモロジー群は何か？

（４） $S^2 \times S^2, CP^2 \# CP^2$ $CP^2 \# C\bar{P}^2$ コホモロジーの環構造は？

4.5　微分形式について

（１）: RP^2 を Mobius の帯と 2 次元円板の貼り合わせとみなす．RP^2 の de Rham cohomology を定義を用いて計算する．

（２） S^3 から S^2 への滑らかな写像 f に対して，Hopf invariant の３通りの定義（微分形式を用いたもの，交叉数を用いたもの，mapping cone を用いたもの）が等しいことを示す．また，Hopf map に対して，その各々を直接計算し，等しいことをチェックする．

（３）RP^2 の上の 2 次微分形式に対して，その積分を定義することはできない．しかし，Riemann 計量が与えられたとき，函数を定義することはできる．この相違について初学者に納得できるように説明してみる．

4.6　Poincare duality について

（１） CP^2, $S^2 \times T^2$ のコホモロジー群の各要素について，その Poincare dual を実現する部分多様体を例示する．そしてそれらの交叉を調べることによってコホモロジーの積構造を決定する．

4.7　ベクトル束について

（１）CP^5 の中における CP^2 の法束は tautological line bundle あるいは canonical line bundle とどのような関係にあるか．

（２）閉 Riemann 面の divisor から複素直線束を構成する．そしてその section の zero の個数はどうなるか．

4.8　ファイバー束について

（１）$SO(3)$ は S^2 上に作用する．これを利用して $SO(2)$ をファイバーとするファイバー束 $SO(3) \to S^2$ を構成する．そして，定義にもどって，これがファイバー束であることをチェックする．

（２）S^2 上の S^2 束であって，構造群が $SO(3)$ であるものを分類する．それらについて，全空間の基本群，ホモロジー群，コホモロジー環を調べる．

4.9　特性類について

（１）複素直線束の $c_1 = e$ の定義をできるだけたくさん挙げ，それらの相互の関係を明らかにする．

（２） CP^3 の中の n 次複素超曲面の Chern classes を計算する．