

集合と位相：用語・記号 (2011/10/06)

1 論理記号、量化記号

これらの記号についてこの講義では略記法としてのみ扱う立場をとる。

- 真 : (命題が) 成立すること
- 偽 : (命題が) 成立しないこと
- $\neg P$ (あるいは $\sim P$) : P ではない
- $P \wedge Q$: P かつ Q
- $P \vee Q$: P または Q
- $P \Rightarrow Q$: P ならば Q $\Longleftrightarrow \neg P \vee Q$
- $P \Leftrightarrow Q$: P と Q とは同値
- $\forall x P(x)$: 全称記号 すべての x に対して $P(x)$ が成立する
- $\exists x P(x)$: 存在記号 ある x が存在して $P(x)$ が成立する
- $\exists! x P(x)$ (あるいは $\exists_1 x$) : 丁度ひとつの x に対して $P(x)$ が成立する
- 逆
- 対偶
- 論理式
- ひとつしか存在しないものには名前を付けられる

2 集合

この講義では「集合」を「要素が明確に定まっているもの」として素朴に捉える。たとえば「空集合」は集合である。しかし、たとえば「あらゆる集合全体」はひとつの集合としては認める理由はないと考える¹。曖昧さを排除するため、原則として有限回の操作のみを用いて議論を行い、無限回の操作を繰り返す議論（すなわち「 $\dots$ 」を使わないと記述できない議論）は行わない。例外として第一に、自然数全体の集合の存在は認める（これによって数学的帰納法を有限の操作として行うことができる）。また、第二に「選択公

¹もしあらゆる集合が確かに集合として規定されたとすると、その時はじめて「あらゆる集合全体」の要素が明確に定まり、集合として規定されうる。この議論は循環しており、よってこの規定は（少なくともそのままでは）容認できない、と考える。

理」は認める（これによって無限個の集合の族から各々ひとつの要素を取り出す操作を事実上行うことができる）²。

なお、曖昧さを排除する立場を徹底する場合には、あらゆる数学的議論において現れるあらゆる対象は、それ自身がなんらかの集合であると考え（公理的集合論）。たとえば、集合の要素もふたたび集合であり、個々の自然数もある集合として定義されるものとする。

2.1 基本用語

- $A = B$: A と B とは等しい
- $A \neq B$: A と B とは等しくない（一般に、否定は斜線で表す）
- $\emptyset$: 空集合
- $x \in X, X \neq x$: x は X の要素（あるいは元）である
- $A \subset B, B \supset A$: B は A の部分集合である
- $\{x, y, z\}$: x, y, z を要素とする集合
- $A \cup B$: 和集合、合併集合 (union) $A \cup B \cup C$ 等も同様に定義する
- $A \cap B$: 共通部分 (intersection) $A \cap B \cap C$ 等も同様に定義する
- $A \setminus B$: A の要素であって B の要素ではないもの全体のなす集合
- $P(A)$ （あるいは $\mathcal{P}(A), 2^A$ ）: べき集合
 A の部分集合全体からなる集合
- $\{x \mid P(x)\}$: 条件 $P(x)$ を満たすような X の要素 x 全体のなす集合
(注) 存在するとは限らない！
- $\{x \in X \mid P(x)\}$: 条件 $P(x)$ を満たすような X の要素 x 全体のなす集合
(注) 常に存在する
- $\forall x \in A P(x)$: A のすべての要素 x に対して $P(x)$ が成立する
- $\exists x \in A P(x)$: A のある x が存在して $P(x)$ が成立する
- $\exists! x \in A P(x)$ ($\exists_1 x$) : 丁度ひとつの A の要素 x に対して $P(x)$ が成立する

2.2 集合論的に定義される基本概念

- (x, y) : 順序対 ひとつの定義の仕方は $\{\{x\}, \{x, y\}\}$
- (x, y, z) : ひとつの定義の仕方は $((x, y), z)$ 等々
- $A \times B := \{z \mid \exists x \in A \exists y \in B z = (x, y)\}$
(注) これは上の順序対の定義においては $P(P(A \cup B))$ の部分集合として存在する。
 $A \times B$ の定義を次のようにも略記する $\{(x, y) \mid x \in A \wedge y \in B\}$
- $A \times B \times C$: ひとつの定義の仕方は $(A \times B) \times C$ 等々
- A^2 : $A \times A$

²また、「べき集合」の構成によって、与えられた集合よりいわば「(遥かに) 大きな集合」が作り出される。

- $A^3 : A \times A \times A$ 等々
- $0 : \emptyset$ ひとつの定義の流儀
- $1 : \{\emptyset\}$ ひとつの定義の流儀
- $2 : \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ ひとつの定義の流儀 以下同様
- $n + 1 : n \cup \{n\}$ ひとつの定義の流儀
- $\mathbb{N}$: 自然数全体の集合

(注) $\mathbb{N}$ の存在は公理として仮定する。なお、 $\mathbb{N}$ の特徴づけは「数学的帰納法」と密接にかかわる。

- 集合 A の上の二項関係 R : $R \subset A \times A$

(注) $(x, y) \in R$ であることを、しばしば $x \sim_R y$ などと書く。さらに R も省略して $x \sim y$ などとも書く。

- 同値関係、対称律、反射律、推移律
- 順序関係 (あるいは半順序関係) 反対称律
- 全順序関係
- (整列関係)
- 対角集合 : $\Delta_X = \{(x, x) \in X \times X \mid x \in X\}$

3 写像

$$f : X \rightarrow Y$$

- 写像 $f : X \rightarrow Y$: $f = (X, Y, \Gamma)$ ここで

$\Gamma \subset X \times Y$ でありまた、 $\forall x \in X \exists_1 y (x, y) \in \Gamma$ を仮定

- 写像 f のグラフ : 上の Γ
- 定義域、
- 像 $f(a)$: 要素 $a \in X$ の像
- 像 $f(A)$: 部分集合 $A \subset X$ の像 (注) 記号の乱用
- 逆像 $f^{-1}(b)$: 要素 $b \in Y$ の逆像
- 逆像 $f^{-1}(B)$: 部分集合 $B \subset Y$ の逆像 (注) 記号の乱用
- 恒等写像、対角写像、包含写像、定値写像、特性写像、射影
- $\text{Map}(X, Y)$: X から Y への写像全体のなす集合
- 写像の制限、制限写像
- 写像の合成、合成写像
- 可逆写像、逆、(右逆、左逆)
- 単射
- 全射³
- 全単射 : 可逆写像と同値である
- 「同一視する」という言い方 (その1): 固定された可逆写像によるものの場合

³全射の左逆の存在を公理として仮定する。[選択公理と同値]

4 集合の族

$(X_i)_{i \in I}$

- $(X_i)_{i \in I}$ (あるいは $\{X_i\}_{i \in I}$) : I によって添字づけられた集合の族
- $\bigcup_{i \in I} X_i$
- $\bigcap_{i \in I} X_i$
- $\coprod_{i \in I} X_i$
- $\prod_{i \in I} X_i$ ⁴
- $X^I : \text{Map}(I, X)$

5 商集合

R を X の同値関係とする

- x の類 (あるいは x を含む類) ($\bar{x}$ あるいは $[x]$)
- 商集合 X/R (あるいは 記号 $X/\sim$, $\bar{X}$ もしばしば使われる)
- 商写像 $q : X \rightarrow X/R$
- 完全代表系
- 「同一視する」という言い方 (その 2): 考察を商集合へと移行させることをさす場合

6 注

6.1 例

- 数学における様々な概念構成が、集合論的な操作を用いて自由に行われる。
- 空間の張り合わせ (多様体の定義等)
- 有理数体に $\sqrt{2}$ を添加した体
- 可測関数

6.2 準教科書に載っていて説明しなかったこと

同値関係の細かさ、引き起こされる写像、値写像、普遍性

⁴すべての X_i が空でないとき $\prod_{i \in I} X_i$ も空でないことを公理として仮定する。[選択公理]