葉層構造について

足助 太郎

広島大学理学部数学科

１９９７年4月２２日

本日の話のほとんどは適切な仮定のもとに、開多様体や境界のある多様体について成り立つが、簡単のために多様体はすべて閉多様体と仮定する。

Definition 1. 多様体 M の葉層構造 (foliation) $\mathcal{F}$ とは、M のはめ込まれた部分多様体への分割である。そのはめ込まれた各部分多様体を葉 (leaf) という。

Example 2. トーラス T^2 上の線形流はその傾きによらず、M の葉層構造を定める。よく知られているように、直線の傾きが有理数のときは各軌道は S^1 に同相で、とくに T^2 に埋め込まれた多様体になっているが、一方直線の傾きが無理数のときは、各軌道は はめ込まれた $\boldsymbol{R}$ になり、T^2 内で稠密になる。

Example 3. 単位球 $S^2 \subset \boldsymbol{R}^3$ を x–y 平面と平行な平面で切った切り口全体は S^2 の葉層構造を定める。

上記のようにもっとも一般の意味では葉は必ずしも同じ次元でなくてもよい。葉層構造は上の例からも推測されるように、微分方程式と深く関連するが、その時にはさまざまな次元をもつ葉が現れるのが普通である。しかし、位相幾何的に扱う際には各葉が同じ次元を持つ時の方がよく扱われる。ここでも、葉の次元は一定と仮定する。

葉層構造の研究の中での一つの中心的な話題として、Godbillon-Vey 類といわれる、あるコホモロジーの元などのいわゆる２次特性類の研究があげられる。余次元（多様体の次元と葉の次元の差）が１の葉層構造はさまざまな性質がよく知られているが、その研究においては Godbillon-Vey 類の研究が大きな役割を果たした。
Godbillon-Vey 類は余次元が高い葉層構造に対しても定義され、それなりの意味があるが、余次元が１の時ほど決定的な役割は（単独では）果たさないと考えられる。したがって、余次元が高い葉層構造の特性類の観点からの研究はまず Godbillon-Vey 類以外の特性類の意味をはっきりさせることが必要と考えられる。

一方、葉層構造の研究は、その leaf space の研究という面を持つ。ここで、leaf space とは、多様体の中で同じ葉に属する点を同一視したものである。Example 2. でいえば、直線の傾きが有理数なら S^1、そうでなければよく分からない、non-Hausdorff な空間になる。

このような研究でもっとも典型的なものとして、葉層構造のもつ横断的な構造といわれるものの研究が挙げられる。ここで言う構造としてはいろいろなものが考えられる。それは例えばリーマン計量であったり、いわゆる一般の Geometric Structure (e.g. hyperbolic structure) や、測度であったりする。葉層構造が、これらの構造を横断的な構造としてもつとは、適当な local transversal の集まりで、

1) （全体として）すべての葉と交り、
2) 各 local transversal の上には問題になっている構造があり、
3) それらは各 local transversal の上に葉層構造から誘導される変換（ホロノミー）で不変である

ものが取れることを言う。

例えば最初のトーラスの例では、local transveral として、S^1 をとることができるが、この時には S^1 上にホロノミー不変なリーマン計量がいつでも取れる。最初に考えた直線の傾きが無理数の時には、このような計量は、leaf space として出てくる non-Hausdorff 空間の計量とある意味で考えることができる。

余次元が高い葉層を研究するときには、このような構造を考えることが多い。構造が局所等質（local transverse が適当な等質空間の開集合と思える）場合などは、特性類とも絡めて研究されている。