２０１９年度線型代数学演習（理 I 6,7,9,10 組向け，足助担当）演習問題８ v4 '19/10/29（火）
'19/10/22 :（v1）初版作成．追って問を加える．
'19/10/26 :（v2）問を追加．番号が変わっているので注意せよ．また，問 8.6 以降は 11/1 の講義で扱う．発表することは全く構わないが，v3 以降で問の番号が変わることがあるので注意すること．
'19/10/29 :（v3）問 8.12 を追加．問 8.7 および問 8.11 の誤植を修正．
'19/11/12 :（v4）問 8.2 の誤植を修正（f の最高次の係数が 1 になっていた．解答にはあまり影響ない）．ヒントを追加．

以下では $K=\mathbb{R}$ あるいは $K=\mathbb{C}$ とする．また，V を線型空間とし，$K=\mathbb{R}$ の場合には $\langle\cdot\mid\cdot\rangle$ をユークリッド計量，$K=\mathbb{C}$ の場合には $\langle\cdot\mid\cdot\rangle$ をエルミート計量とする．

問 8.1. $K=\mathbb{R}$ とする．v と w が直交するならば，v と w のなす角は $\pm\dfrac{\pi}{2}+2n\pi$，ただし $n\in\mathbb{Z}$，であることを示せ．

問 8.12. $\langle\cdot\mid\cdot\rangle_1$，$\langle\cdot\mid\cdot\rangle_2$ を共にユークリッド内積（$K=\mathbb{R}$ の場合）あるいはエルミート内積（$K=\mathbb{C}$ の場合）とする．$a,b>0$ として，$\langle\cdot\mid\cdot\rangle_3$ を，$v,w\in V$ について

$$\langle v\mid w\rangle_3=a\langle v\mid w\rangle_1+b\langle v\mid w\rangle_2$$

により定めると，$\langle\cdot\mid\cdot\rangle_3$ は V の内積であることを示せ．

問 8.2. $f\in\mathbb{R}[x]$ とする．$f\in\mathbb{C}[x]$ と見なして

$$f(x)=a(x-\lambda_1)^{m_1}\cdots(x-\lambda_r)^{m_r},$$

ただし，$a\neq 0$，かつ，($\lambda_i=\lambda_j$ ならば $i=j$)，と因数分解する．

1) 次のいずれかが成り立つことを示せ．
   i) λ_i は実数である．
   ii) λ_i は実数ではない．このときには，λ_j（$j\neq i$）のいずれかは $\overline{\lambda_i}$ に等しく，また，$m_j=m_i$ が成り立つ．

   ヒント：因数分解は一意的であることを踏まえて，f の因数分解と $\overline{f}$ の因数分解を比較してみよ．
2) 逆に，$f\in\mathbb{C}[x]$ を因数分解した時に，1) の条件が成り立てば $f\in\mathbb{R}[x]$ が成り立つことを示せ．

問 8.3. $A \in M_n(K)$ とする．また，$\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in K$ を A の相異なる固有値全体とし，m_i を λ_i の重複度とする．このとき，以下が成り立つことを示せ．

1) ${}^t\!A$ の固有値は重複度も含めて A の固有値と等しい．
2) A^* の固有値は $\overline{\lambda_1}, \ldots, \overline{\lambda_r}$ であって，$\overline{\lambda_i}$ の重複度は m_i に等しい．
3) A は正則だとする．このとき，A^{-1} の固有値は $1/\lambda_1, \ldots, 1/\lambda_r$ であって，$1/\lambda_i$ の重複度は m_i に等しい．また，λ_i に属する A の固有ベクトルは $1/\lambda_i$ に属する A^{-1} の固有ベクトルである．

ヒント：いずれの場合（特に 1) と 2) について）も次のようなことに注意する必要がある．例えば 1) について，A の固有値 λ が ${}^t\!A$ の固有値であることを示そうとする．すると $v \in K^n \setminus \{o\}$ が存在して $Av = \lambda v$ が成り立つが，v は必ずしも ${}^t\!A$ の固有ベクトルではない（必ず成り立つのは ${}^t v\,{}^t\!A = \lambda\,{}^t v$ である）．${}^t\!Aw = \lambda w$ が成り立つような $w \in K^n \setminus \{o\}$ が存在することを示さないといけないが，これは方程式 $(\lambda E_n - {}^t\!A)w = o,\ w \neq o$ がいつ解を持つか，その条件と方程式 $(\lambda E_n - A)v = o, v \neq o$ が解を持つための条件を比較すれば示せる．また，${}^t\!A$ の固有値が A であることや，固有値の重複度が等しいことも示す必要がある．これらについては ${}^t({}^t\!A) = A$ などが成り立つことを用いれば議論はそれほど要らない．

問 8.4. $A \in M_n(K)$ とし，φ を A の固有多項式とする．このとき以下が成り立つことを示せ．

1) φ は n 次多項式である．
2) x^n の係数は 1 に等しい．
3) x^{n-1} の係数は $-\operatorname{tr} A$ に等しい．ここで $\operatorname{tr} A$ は対角成分の和である（A のトレースと呼ぶ）．
4) 定数項は $(-1)^n \det A$ に等しい．

ヒント：行列式を置換を用いて表す公式（場合によっては定義）を用いて x^k の係数を直接計算しても良いし，以下のように帰納的に示すこともできる．$n = 1$ ならばいずれの主張も定義から直ちに従う．$A \in M_{n-1}(K)$ の場合に主張が成り立つとし，$A \in M_n(K)$ とする．また，A の固有多項式を φ_A で表す．$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & D \end{bmatrix}$ と，$D \in M_{n-1}(K)$ となるように区分けする．すると

$$\varphi_A(x) = \det \begin{bmatrix} x - a & -b \\ -c & xE_{n-1} - D \end{bmatrix}$$

が成り立つ．ここで右辺を第 1 列に関して展開する．D'_k を $\begin{bmatrix} -b \\ xE_{n-1} - D \end{bmatrix}$ の第 k 行を取り除いて得られる $(n-1)$ 次の正方行列とすると，展開には $\varphi_D(x) = \det(xE_{n-1} - D)$ と $\det D'_k$ が現れるが，前者は $(n-1)$ 次多項式であって，一方，$\det D'_k$ は高々$(n-2)$ 次の多項式である．このことを用いて x^n や x^{n-1} の係数を調べると，$A \in M_n(K)$ についても主張が成り立つことが示さ

れる．また，x^{n-1} の係数は $(x-a)\varphi_D(x)$ の x^{n-1} の係数に等しい．行列式については $\varphi_A(0)$ を計算してみよ．

問 8.5. V を n 次元線型空間，f を V の線型変換とする．$\mathscr{V}=(v_1,\dots,v_n)$ を V の基底とし，A を $\mathscr{V}$ に関する f の表現行列とする．そして

$$\operatorname{tr} f = \operatorname{tr} A,$$
$$\det f = \det A$$

と定める．すると $\operatorname{tr} f$，$\det f$ は V の基底 $\mathscr{V}$ の取り方（選び方）によらないことを示せ．$\operatorname{tr} f$，$\det f$ をそれぞれ f の**トレース**，**デターミナント**と呼ぶ（どちらも「日本語訳」は存在するがあまり用いられない）．また，φ を f の固有多項式とすると，次が成り立つことを示せ．即ち，

1) φ は n 次多項式である．
2) x^n の係数は 1 に等しい．
3) x^{n-1} の係数は $-\operatorname{tr} f$ に等しい．
4) 定数項は $(-1)^n \det f$ に等しい．

問 8.6. $V_1,\dots,V_r \subset V$ を部分線型空間とし，$V_1+\cdots+V_r$ は直和だとする．この時，任意の $1\leq i_1<\cdots<i_k\leq r$ について $V_{i_1}+\cdots+V_{i_k}$ は直和であることを示せ．

問 8.7. V を線型空間とし，$V=V_1\oplus\cdots\oplus V_r$ を直和分解とする．$\pi_i\colon V\to V_i$ を $v=v_1+\cdots+v_r$，$v_k\in V_k$ と表して $\pi_i(v)=v_i$ と置くことにより定める．

1) π_i はきちんと定まっていることを示せ．
   ※ このように,「きちんと定まっている」ことを「well-defined である」と（日本語の文章であっても）言うことが多い．
2) $\pi_i\circ\pi_j=\begin{cases}\pi_i, & i=j,\\ 0, & i\neq j\end{cases}$ が成り立つことを示せ．ここで 0 は零写像を表す．

問 8.8 ***(問 8.7 の逆).** V を線型空間とする．V の線型変換 $p_1,\dots,p_r$ で条件

i) $p_i\circ p_j=\begin{cases}p_i, & i=j,\\ 0, & i\neq j\end{cases},$
ii) $p_1+\cdots+p_r=\mathrm{id}$

を満たすものが存在するとする．このとき，$V_i=\operatorname{Im} p_i$ と置く．

1) $V=V_1\oplus\cdots\oplus V_r$ が成り立つことを示せ．また，問 8.7 のように π_i を定めると $\pi_i=p_i$ が成り立つことを示せ．
2) $\operatorname{Ker} p_i=V_1\oplus\cdots\oplus\widehat{V_i}\oplus\cdots V_r$ が成り立つことを示せ．ここで，$\widehat{V_i}$ は V_i を省くことを意味する．

対角化の小まとめ

正方行列を（どういう訳か）対角化したいとする．このとき，作業としては以下のことを行えば良い．$A \in M_n(\mathbb{C})$ とする（実際には $A \in M_n(\mathbb{R})$ が成り立つかも知れない）．

1) A の固有多項式を φ とする．$\varphi(x) = \det(xE_n - A)$ である．固有方程式 $\varphi(x) = 0$ を複素数の範囲で解いて，相異なる解の全体を $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ とする．また，λ_i の重複度を m_i とする．
2) $A \in M_n(\mathbb{R})$ とする．ある i について $\lambda_i \notin \mathbb{R}$ が成り立つならば，A は $\mathbb{R}$ 上対角化不可能である（$\mathbb{C}$ 上対角化可能である可能性は残る）．
3) 各 i について，$v \in \mathbb{C}^n$ に関する方程式
$$(\lambda_i E_n - A)v = o$$
を解く．
   i) ある i について解空間の次元（これは必ず m_i 以下である）が，m_i 未満であれば，A は $\mathbb{C}$ 上対角化不可能である（従って，$A \in M_n(\mathbb{R})$ であっても $\mathbb{R}$ 上対角化不可能である）．
   ii) 任意の i について，解空間の次元が m_i に等しいとする．このときには，解空間の基底を $\{v(i)_1, \ldots, v(i)_{m_i}\}$ とする．$A \in M_n(\mathbb{R})$ であって，全ての固有値が実数ならば，$v(i)_j \in \mathbb{R}^n$ とできる．
4) $P = [v(1)_1 \ \cdots \ v(1)_{m_1} \ \cdots \ v(r)_1 \ \cdots \ v(r)_{m_r}]$ と置く．$P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ である．また，$A \in M_n(\mathbb{R})$ であって，A の固有値が全て実数ならば $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ である．いずれにしても，
$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 E_{m_1} & & & \\ & \lambda_2 E_{m_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_r E_{m_r} \end{bmatrix}$$
が成り立つ．

線型変換については，基底を適宜取って表現行列について考えれば良い．

問 8.9. 以下の次の行列（A とする）について $\mathbb{C}$ 上対角化可能ならば $\mathbb{C}$ 上対角化せよ．また，$\mathbb{R}$ 上対角化可能ならば $\mathbb{R}$ 上対角化せよ．いずれの場合にも，対角化可能な場合には $P^{-1}AP$ が対

角行列であるような $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$ または $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ を一つ求めよ．

$$1)\ \begin{bmatrix} 10 & 6 & -7 \\ 9 & 7 & -7 \\ 18 & 12 & -13 \end{bmatrix} \qquad 2)\ \begin{bmatrix} 9 & 5 & 22 \\ 7 & 5 & 23 \\ 15 & 9 & 46 \end{bmatrix} \qquad 3)\ \begin{bmatrix} -5 & -1 & 32 \\ 7 & 7 & 22 \\ -3 & 3 & 58 \end{bmatrix}$$

$$4)\ \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$ 但し $a, b \in \mathbb{R}$ とする

問 8.10. 1) $A \in M_n(\mathbb{C})$ が対角化可能であることと，$A^* \in M_n(\mathbb{C})$ が対角化可能であることは同値であることを示せ．

2) $A \in M_n(\mathbb{R})$ とする．

i) A が $\mathbb{C}$ 上対角化可能であることと，${}^tA$ が $\mathbb{C}$ 上対角化可能であることは同値であることを示せ．

ii) A が $\mathbb{R}$ 上対角化可能であることと，${}^tA$ が $\mathbb{R}$ 上対角化可能であることは同値であることを示せ．

※ 両方解くこと．

問 8.11. 1) $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ が対角化可能であることと，$A^{-1} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ が対角化可能であることは同値であることを示せ．

2) $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ とする．

i) A が $\mathbb{C}$ 上対角化可能であることと，A^{-1} が $\mathbb{C}$ 上対角化可能であることは同値であることを示せ．

ii) A が $\mathbb{R}$ 上対角化可能であることと，A^{-1} が $\mathbb{R}$ 上対角化可能であることは同値であることを示せ．

※ 両方解くこと．

※ 以下の問は発表には用いないこと．

問. $a, b, c \in \mathbb{R}$ とし，$n \geq 2$ について $A_n \in M_n(\mathbb{R})$ を

$$A_n = \begin{bmatrix} a & b & & & & \\ c & a & b & & & \\ & c & a & b & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & c & a & b \\ & & & & c & a \end{bmatrix}$$

により定める．なお，空白の部分の成分は全て 0 とする．例えば

$$A_2 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & a \end{bmatrix}, \ A_3 = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & a & b \\ 0 & c & a \end{bmatrix}$$

である．また，$\alpha_n = \det A_n$ と定める．

1) $n \geq 4$ とする．α_n を a, b, c および $\alpha_{n-1}, \alpha_{n-2}$ を用いてなるべく簡潔に表せ．
2) $a = 2,\ b = c = 1$ とする．α_n を求めよ．

問. $A \in M_{3,5}(\mathbb{R})$ とし，$A = [a_1 \ \cdots \ a_5]$ と $a_1, \ldots, a_5 \in \mathbb{R}^3$ を用いて表す．また，$P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ について PA は既約行階段行列だとする（講義では既約行階段行列のことを単に行階段行列と呼んだ．資料集では被約行階段行列である）．

1) $\operatorname{rank} A = 3$ とする．このとき，$i, j, k \in \mathbb{N}$，ただし $1 \leq i < j < k \leq 5$，が存在して $[a_i \ a_j \ a_k] = P^{-1}$ が成り立つことを示せ．
2) 主張「$\operatorname{rank} A = 3$ であるような $A \in M_{3,5}(\mathbb{R})$ を固定するごとに，1) のような i, j, k は一意的である」が成り立つならばそのことを示し，そうでないならば反例を一つ挙げよ（後者の場合には挙げた例が反例となっていることも示すこと）．
3) $\operatorname{rank} A < 3$ とする．このとき，$i, j, k \in \mathbb{N}$，ただし $1 \leq i < j < k \leq 5$，であって，$[a_i \ a_j \ a_k] = P^{-1}$ が成り立つものは存在しないことを示せ．

問. $V = \{f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ とする．V は函数の和及び実数倍に関して線型空間である（このことは認めて良い）．また，$f \in V$ とするとき，$F_f \colon V \to V$ を

$$F_f(g) = fg$$

により定める（$F_f(g)$ は $F(g)(x) = f(x)g(x)$ により定まる函数である）．

1) F_f は線型写像であることを示せ．
2) $o \in V$ を零元（零ベクトル）とする．$x \in \mathbb{R}$ とする時，$o(x)$ をなるべく具体的に表せ．必要であれば x を用いて良い（不要ならば無理に用いる必要はない）．
3) F_f が単射であるための f に関する必要十分条件を求めよ．
4) $W = \{f \in V \mid \exists M \geq 0,\ |x| \geq M \Rightarrow f(x) = 0\}$ と定める．W は V の部分線型空間であることを示せ．
5) W は有限次元ではない．このことを示せ．

問. $a \in \mathbb{R}$ とする．さて，$\mathbb{R}^3$ の部分線型空間 V を

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ \middle| \ x_1 + x_2 + a x_3 = 0 \right\}$$

により定める（V が $\mathbb{R}^3$ の部分線型空間であることは認めて良い）．また，$f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を

$$f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

により定める．

1) V の基底を一組求めよ．
2) $\mathbb{R}^3$ の基底であって，1) で求めた V の基底の拡大（延長）であるものを一組求めよ．
3) $f(V) \subset V$ が成り立つことを示せ．ただし，$f(V) = \{w \in \mathbb{R}^3 \mid \exists v \in V,\ w = f(v)\}$ と定める．
4) $g\colon V \to V$ を $v \in V$ について $g(v) = f(v)$ と置くことにより定める（f の V への制限を g とする）．g は線型写像である（このことは認めて良い）．1) で求めた V の基底に関する g の表現行列を求めよ．

（以上）