2018 年度線型代数学演習（理 I 36–39 組向け，足助担当）問題 20 v3
'18/10/18（木）
改変履歴．'18/10/20 :（v1）初版作成．概ね 10/25 の分までの「線型代数学」の講義の内容に対応する．
'18/10/28 :（v2）問 20.7 の誤植の修正．問 20.14 および引用している定理に関するコメントを追加．
'18/12/26 :（v3）「解答済みの問題」との整合性を図るため，番号を v1 のものに戻した．

以下，$K = \mathbb{R}$ あるいは $K = \mathbb{C}$ とする．

定義 20.13.

$$\mathrm{O}_n = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid {}^t\!A\,A = A\,{}^t\!A\ = E_n\},$$
$$\mathrm{U}_n = \{A \in M_n(\mathbb{C}) \mid A^*A = AA^* = E_n\}$$

と置いて，それぞれ**直交群**，**ユニタリ群**と呼ぶ．

O_n や U_n は **Lie 群**と呼ばれる群である．

問 20.1 (QR 分解)．$A \in \mathrm{GL}_n(K)$ とする．

1) $Q \in \mathrm{O}_n$（$K = \mathbb{R}$ の場合）あるいは $Q \in \mathrm{U}_n$（$K = \mathbb{C}$ の場合）と，上三角行列 $R \in M_n(K)$ が存在して $A = QR$ が成り立つことを示せ．
   ヒント：$A = [a_1\ \cdots\ a_n]$ と列ベクトルを用いて表す．Gram–Schmidt の直交化法を用いて，上三角行列 B であって $AB = [q_1\ \cdots\ q_n]$ とすると $\{q_1, \ldots, q_n\}$ が K^n の正規直交基底であるようなものを探してみよ（K^n には標準的な計量を入れる）．
2) 1) のように $A = QR$ と表す方法は一意的であることを示せ．
   ヒント：$A = QR = Q'R'$ とすると $Q'^{-1}Q = R'R^{-1}$ が成り立つ．左辺は O_n あるいは U_n の元，右辺は上三角行列である．

問 20.2. 次の行列の行列式を求めよ．

1) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 7 & 9 & 11 \\ 13 & 15 & 17 \end{bmatrix}$ 2) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 3) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 6 & 1 & 9 & 10 \\ 4 & 7 & 9 & 1 & 11 \\ 5 & 8 & 10 & 11 & 1 \end{bmatrix}$ 4) $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -2 & 0 & 6 & 7 & 8 \\ -3 & -6 & 0 & 9 & 10 \\ -4 & -7 & -9 & 0 & 11 \\ -5 & -8 & -10 & -11 & 0 \end{bmatrix}$

※ 具体的な行列式の計算はこれ以上出題しないが，各自で慣れておくこと．

問 20.3. $n \geq 2$ とし，$A, B, C, D \in M_n(K)$ とする．

$$\det \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = (\det A)(\det D) - (\det B)(\det C)$$

が成り立たないような A, B, C, D の例を n ごとに一組ずつ挙げよ．

問 20.4. ※ 本問においては体積の定義は高校までの要領で考えれば良い．

1) $A \in M_1(\mathbb{R})$ とする．$A = [a]$ とすると，線分 $0a$ の長さは $|\det A|$ に等しいことを確かめよ．

   ※ 本問は単独では発表に用いないこと．

2) $A \in M_2(\mathbb{R})$ とする．$A = [a_1\ a_2]$ と列ベクトルを用いて表す．a_1, a_2 から自然に得られる平行四辺形の面積は $|\det A|$ に等しいことを示せ．

3) $A \in M_3(\mathbb{R})$ とする．$A = [a_1\ a_2\ a_3]$ と列ベクトルを用いて表す．a_1, a_2, a_3 から自然に得られる平行六面体の面積は $|\det A|$ に等しいことを示せ．

注 20.5. 問 20.4 は一般の $M_n(\mathbb{R})$ の元について成り立つ．即ち，$A \in M_n(\mathbb{R})$ を $A = [a_1\ \cdots\ a_n]$ と表して，$a_1, \ldots, a_n$ が定める $\mathbb{R}^n$ 内の図形（平行多面体）を考えると，その体積は $|\det A|$ に等しい．このことは積分の変数変換の際に重要である．

問 20.6. $A\colon \mathbb{R} \to M_n(K)$ は連続とする（A が連続であることは，各成分が連続であることである．$K = \mathbb{C}$ の時には，成分を $\mathbb{R}^2$-値函数とみなして連続かどうか定める）．$\det A\colon \mathbb{R} \to K$ は連続であることを示せ．

問 20.7 ***.** $A \in M_n(K)$ について，

$$\|A\| = \sqrt{\operatorname{tr} A^* A}$$

と置く．$K = \mathbb{R}$ の場合には $A^* = {}^t\!A$ である．

1) $\operatorname{tr} A^* A$ を A の成分を用いて表せ．また，$\operatorname{tr} A^* A \geq 0$ が成り立つことを示せ．

2) $A \in \mathrm{GL}_n(K)$ とする．$\delta > 0$ が存在して，

   $$B \in M_n(K),\ \|B - A\| < \delta \Rightarrow B \in \mathrm{GL}_n(K)$$

   が成り立つことを示せ．

3) $0 \leq r \leq n$ について，$S(r) = \{A \in M_n(K) \mid \operatorname{rank} A \geq r\}$ と置く．

   a) $S(0) = M_n(K)$ が成り立つことを確かめよ．

   b) $S(n) = \mathrm{GL}_n(K)$ が成り立つことを確かめよ．

c) $A \in S(r)$ とする．$\delta > 0$ が存在して，

$$B \in M_n(K),\ \|B - A\| < \delta \Rightarrow B \in S(r)$$

が成り立つことを示せ．必要であれば，小行列式と行列のランクに関する定理を調べて用いよ．指定されている参考書では定理 4.3（115 頁）である．

d) 函数 $\mathrm{rank}\colon M_n(K) \to \mathbb{N}$ を $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}\, A$ により定める（ランクを函数とみなす）．$M_n(K)$ を（成分を並べることにより）K^{n^2} とみなすと，$\mathrm{rank}\colon K^{n^2} \to \mathbb{N}$ は下半連続であることを示せ．ここで，函数 $f\colon K^m \to \mathbb{R}$ が $p \in K^m$ において**下半連続**であるとは

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0,\ |x - p| < \delta \Rightarrow f(x) - f(p) > -\epsilon$$

が成り立つことを言う．また，f が任意の $p \in K^m$ について下半連続であるとき，f は下半連続であると言う．

問 20.8. $f_1, f_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ を

$$f_1(x) = t,\ t \in \mathbb{Z},\ x \in [t, t+1),$$
$$f_2(x) = t,\ t \in \mathbb{Z},\ x \in (t, t+1]$$

により定める．f_1, f_2 が下半連続であればそのことを示し，そうでないならばそのことを示せ．
※ 直感的には，f が下半連続であることは f の値が急激に減ることがないことを意味する．

問 20.9. $A \in M_n(K)$ について，A の余因子行列を $\mathrm{adjg}(A)$ で表すことにする[†1]．

1) $n \geq 2$ とし，$A \in \mathrm{GL}_n(K)$ とする．$\mathrm{adjg}(\mathrm{adjg}(A)) = (\det A)^{n-2} A$ が成り立つことを示せ．
2) $A \in M_2(K)$ とする．$\mathrm{adjg}(\mathrm{adjg}(A)) = A$ が成り立つことを示せ．
3) $n \geq 3$ とし，$A \notin \mathrm{GL}_n(K)$ とする．
   a) $\mathrm{rank}\, A < n-1$ ならば，$\mathrm{adjg}(A) = O_n$ が成り立つことを示せ．従って $\mathrm{adjg}(\mathrm{adjg}(A)) = O_n$ が成り立つ．
   b) $\mathrm{rank}\, A = n-1$ とすると，$\mathrm{rank}\,\mathrm{adjg}(A) = 1$ が成り立つことを示せ．また，$\mathrm{adjg}(\mathrm{adjg}(A)) = O_n$ が成り立つことを示せ．

以下の定義は誤りではないが，曖昧な点がある（従って本当の定義ではない）．実用上はあまり困ることはないが，突き詰めて考え始めると数々の問題点が続出する．

[†1] 余因子行列は英語では adjugate matrix と呼ばれるので，そこから採った．ここだけの記号である．

定義 20.10 **. $v, w \in \mathbb{R}^n$（実際には K^n でよい）について，記号 $v \wedge w$ を考え，これは次の性質を持つとする．即ち，

1) $v, v', w \in \mathbb{R}^n$ について $(v+v') \wedge w = v \wedge w + v' \wedge w$ が成り立つ．
2) $v, w \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$ について $(\lambda v) \wedge w = \lambda(v \wedge w)$ が成り立つ．
3) $v, w \in \mathbb{R}^n$ について $w \wedge v = -v \wedge w$ が成り立つ．

また，$v, w, u \in \mathbb{R}^n$ について $(v \wedge w) \wedge u = v \wedge (w \wedge u)$ が成り立つ．この等しい元を $v \wedge w \wedge u$ で表す．また，$0, w \in \mathbb{R}^n$ について $0 \wedge w$ を 0 で表す．同様に，$(0 \wedge w) \wedge u$ なども 0 で表す．

要は，$\wedge$ は概ね通常の掛け算であるが，$v \wedge w = -w \wedge v$ が成り立つという点が異なる．特に，$v \in \mathbb{R}^n$ について，$w = u = v$ とすると

$$v \wedge v = w \wedge u = -u \wedge w = -v \wedge v$$

が成り立つので，$2v \wedge v = v \wedge v + v \wedge v = v \wedge v - v \wedge v = (v - v) \wedge v = 0 \wedge v = 0$ が成り立つ．

例 20.11. e_1, e_2, e_3 を $\mathbb{R}^3$ の基本ベクトルとし，$v = v_1e_1 + v_2e_2 + v_3e_3$, $w = w_1e_1 + w_2e_2 + w_3e_3$ とする．すると，

$$v \wedge w = (v_2w_3 - w_2v_3)e_2 \wedge e_3 + (v_3w_1 - w_3v_1)e_3 \wedge e_1 + (v_1w_2 - w_2v_2)e_1 \wedge e_2$$

が成り立つ．

問 20.12 **. $a_1, \ldots, a_n \in K^n$ とする．$A = [a_1 \ \cdots \ a_n]$ とすると

$$a_1 \wedge \cdots \wedge a_n = (\det A)e_1 \wedge \cdots \wedge e_n$$

が成り立つことを示せ．
ヒント：直接示してもよいし，難しければ行列式を性質により特徴付ける（一意的に定める）定理を用いても良い．指定の参考書では定理 4.6（119 頁）である．

問 20.14. A は歪対称行列とする．即ち，$A \in M_n(K)$ であって，$A + {}^tA = O_n$ が成り立つとする．

1) n が奇数であれば $\det A = 0$ が成り立つことを示せ．
2) $n = 2$ とすると $A = \begin{bmatrix} 0 & x_{12} \\ -x_{12} & 0 \end{bmatrix}$ と表すことができて，$\det A = x_{12}^2$ が成り立つ．また，$n = 4$ とすると，$A = \begin{bmatrix} 0 & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ -x_{12} & 0 & x_{23} & x_{24} \\ -x_{13} & -x_{23} & 0 & x_{34} \\ -x_{14} & -x_{24} & -x_{34} & 0 \end{bmatrix}$ と表すことができて，$\det A = (x_{12}x_{34} + x_{14}x_{23} - x_{13}x_{24})^2$ が成り立つ．これらのことを示せ．

3**) $T_n \subset \mathfrak{S}_n$ を

$$T_n = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \sigma(1) < \sigma(2), \ldots, \sigma(2n-1) < \sigma(2n),\ \sigma(1) < \sigma(3) < \cdots < \sigma(2n-1)\}$$

により定め，

$$\mathrm{Pf}(A) = \sum_{\sigma \in T_n} (\operatorname{sgn} \sigma) x_{\sigma(1)\sigma(2)} \cdots x_{\sigma(2n-1)\sigma(2n)}$$

と置いて A のパフィアンと呼ぶ．$\det A = \mathrm{Pf}(A)^2$ が成り立つことを示せ．

※ 一般に $B = (b_{ij}) \in M_n(K)$ について $\det B = \displaystyle\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} (\operatorname{sgn} \sigma) b_{1\sigma(1)} \cdots b_{n\sigma(n)}$ が成り立つ．
$\mathrm{Pf}(A)^2$ を直接計算してこれと比較するのが現時点では素直な解き方であるが，外積代数（$\wedge$ を用いた計算）を用いた方が簡単である．今のところ無理に解くことは考えずに，例えば $n = 3$ の時に確かめてみる程度で良い．

（以上）