2018 年度微分積分学演習（理 I 36–39 組向け，足助担当）問題 19 v3

’18/10/18（木）

改変履歴．’18/10/14 :（v1）初版作成．概ね 10/15 の講義の分までの内容である．

’18/10/14 :（v2）問 19.6 にコメントを追加．

’18/10/15 :（v3）問 19.19 を追加．※ 原則として講義の記号や番号をそのまま用いる．また，なんだか難しくなった気がすると思うが，積分は難しいので仕方がない[†1]．

問 19.1. $v(P) = \displaystyle\sum_{1\leq k\leq k(\Delta)} v(I_k)$ が成り立つことを示せ．ただし，$k(\Delta) = 0$ の場合は右辺の和は 0 と考える．特に $v(I_k) \leq v(P)$ が成り立つ．

問 19.2. $S' \in \mathbb{R}$ についても条件 (5.1.6) が成り立つとする．このとき $S = S'$ が成り立つことを示せ．

問 19.3. $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を $f(x_1, \dots, x_n) = 1$ により定める．$P = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ とすると $\displaystyle\int_P f(x)dx = v(P)$ が成り立つことを示せ．左辺をしばしば $\displaystyle\int_P dx$ で表す．

問 19.4. 以下が成り立つことを示せ．

1) $\underline{s}(f;\Delta) \leq \overline{s}(f;\Delta)$ が成り立つ．
2) $\overline{s}(f;\Delta) - \underline{s}(f;\Delta) = \displaystyle\sum_{k=1}^{k(\Delta)} (M_k - m_k) v(I_k)$ が成り立つ．
3) $M_k - m_k = \displaystyle\sup_{x,y\in I_k} (f(x) - f(y)) = \sup_{x,y\in I_k} |f(x) - f(y)|$ が成り立つ．
4) f が連続ならば定義 5.1.9 において $M_k = \displaystyle\max_{x\in I_k} f(x)$，$m_k = \displaystyle\min_{x\in I_k} f(x)$ がそれぞれ成り立つ．

問 19.5. $U \subset \mathbb{R}^n$ とする．$f\colon U \to \mathbb{R}^m$ が一様連続であるならば f は U 上連続であることを示せ．

問 19.6 (問 6.13 も参照のこと)**.** $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ が**リプシッツ連続**であるとは $L > 0$ が存在して，

$$\forall\, x, y \in U,\ \|f(x) - f(y)\| \leq L\,\|x - y\|$$

[†1]「積分を如何に定めるか」という問は「図形の面積や体積とは何か」という問とほぼ同値である．曲線の長さを定めるのはそれほど難しくないが，次元が上がって曲面や立体になると話が急激に難しくなる．とはいえ,「まともな図形」に関しては積分は古くから定まっていて，例えば Archimedes（$A\rho\chi\iota\mu\eta\delta\eta\varsigma$）の「方法」には Riemann 積分（の簡単な場合）としか読めない記述がある（これは 2000 年前である）．興味があれば「天秤の原理」などについて調べてみよ．積分にはいろいろなものがあって，例えば Lebesgue 積分はよく用いられる．基本的な状況ではこれらの積分は一致するが，ややこしい状況になるとある積分は定まり，別の積分は定まらないといったことが起きる（このような状況は「微分積分学」では原則としては扱わないが，実は数列の和はそのような例である．これについては後日扱う）．

が成り立つことを言う．また，このような L の下限を**リプシッツ定数**と呼ぶ．$f\colon U \to \mathbb{R}^m$ がリプシッツ連続ならば f は U 上一様連続であることを示せ．

問 19.7 ***.** $K \subset \mathbb{R}^n$ をコンパクト（有界閉集合[†2]）とし，$f\colon K \to \mathbb{R}^m$ を連続函数とすると，f は K 上一様連続であることを示せ．

問 19.8. $K \subset \mathbb{R}^n$, $f\colon K \to \mathbb{R}$ を連続とする．K がコンパクトでないと f は必ずしも一様連続ではないことを例を挙げて示せ．

問 19.9. $P \subset \mathbb{R}^n$ を閉区間の直積，$f\colon P \to \mathbb{R}$ を可積分函数とする．$c \in \mathbb{R}^n$ とし，$P_c = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists y \in P,\ x = y + c\}$ と置き，$f_c\colon P_c \to \mathbb{R}$ を $f_c(x) = f(x-c)$ により定めると P_c も閉区間の直積であって，f_c は P_c 上可積分であることを示せ．

問 19.10. $P \subset \mathbb{R}^n$ を閉区間の直積，$f, g\colon P \to \mathbb{R}$ を可積分函数とする．$fg(x) = f(x)g(x)$ により $fg\colon P \to \mathbb{R}$ を定める．

1) $v(P) = 0$ とすると fg は P 上可積分であること示せ．
2) $v(P) \neq 0$ とする．この時 f, g は有界であるから，ある $C \in \mathbb{R}$ が存在して P 上 $|f| \leq C, |g| \leq C$ が成り立つ．このことを用いて，$|fg(x) - fg(y)| \leq C(|f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)|$ が成り立つことを示せ．
3) fg は P 上可積分であること示せ．

問 19.11. $n \in \mathbb{N}$ とし，$t \in [0,1]$ について $\displaystyle\int_0^t x^n dx = \int_{[0,t]} f(x)dx$ と定める．$\displaystyle\int_0^t x^n dx = \frac{1}{n+1}t^{n+1}$ であることを定義に従って積分を直接計算することにより示せ．ただし，x^0 は x によらず 1 とみなす．

[†2] $\mathbb{R}^n$ の部分集合についてはコンパクトであることと有界閉集合であることは同値であるが，一般にはこれらは異なる概念である．

問 19.12 (区分求積法)．$f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ を連続とする．$n \geq 1$ とし，$i = 0, \ldots, n-1$ について $I_{i;n} = \left[\dfrac{i}{n}, \dfrac{i+1}{n}\right]$ とする[†3]．

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(\frac{i}{n}\right) = \int_0^1 f(x)dx$$

が成り立つことを示せ．

※ ここでは $I_{i;n}$ の幅は一定であるが，リーマン積分の定義ではこのようなことは特に仮定していない．この意味で，ここでの状況は特別である．

問 19.13 (簡単な図形の面積)．ここではやや直感的に（論理的には不十分に）面積について考える．正確なことは後日講義で扱う．

$f\colon [0,1] \to [0,1]$ を連続とし，$x \in [0,1]$ について $f(x) \geq 0$ とする．$K_f \subset \mathbb{R}^2$ を

$$K_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0,1],\ y \in [0, f(x)]\}$$

により定める．また，$n \geq 1$ とし，$i = 0, \ldots, n-1$ について $I_{i;n} = \left[\dfrac{i}{n}, \dfrac{i+1}{n}\right]$ とし，

$$L_n = \bigcup_{i=0}^{n-1} I_{i;n} \times \left[0, \sup_{x\in I_{i;n}} f(x)\right]$$

$$J_n = \bigcup_{i=0}^{n-1} I_{i;n} \times \left[0, \inf_{x\in I_{i,;}} f(x)\right]$$

と置く．

1) $\sup, \inf$ はそれぞれ $\max, \min$ で置き換えて良いことを示せ．
2) $f(x) = x^k,\ k \geq 0$，ただし $x^0 = 1$，と定める．K_f 及び L_n, J_n を図示せよ．包含関係に注意すること．

[†3] 記号「,」と「;」には多くの場合数学的な差は無い．一般的には「;」の方が「,」よりも前後の記号の差異あるいは断絶が大きい．例えば 2 変数函数（の値）を $f(x,y)$ と表すとき，x と y は立場としては平等であるので，これを $f(x;y)$ と表すことはあまり多くない．後者のように表す場合には x,y に（例えば物理的な）意味があって，変数として本質的に異なることが多い．例えば微分方程式の解で，初期条件を c，変数 を t とするものを $y(t;c)$ のように表すことがある．この場合には t と c はいずれも解に関しては変数であるが，意味合いが全く異なるので「;」によって分けている．この場合にも $y(t,c)$ と表すことが少なくない．別な例を挙げる．分割 Δ に関する f の過剰和 $\overline{s}(f;\Delta)$ と表すとき，f と Δ の立場は平等ではない．ここで求めたいものはあくまで f に関する量であって，Δ は立場としては従属的である．考え方次第なので，過剰和を $\overline{s}(f,\Delta)$ と表しても構わない．さらに別の例を挙げる．実数を成分とする n 次の正方行列全体のなす集合は $M(n;\mathbb{R})$ などと表されるが，この場合 n も $\mathbb{R}$ も重要である．ただ，n の指す内容と $\mathbb{R}$ の指す内容には大きな差があるので，「;」で分けている．この場合にも $M(n,\mathbb{R})$ と表すことも少なくない．

3) （f は仮定を満たす一般のものとする.）S_n, s_n を L_n, J_n をそれぞれ自然に長方形に（縦に）分割して得られる面積とする．必要であればダルブーの定理を用いて $\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} S_n = \int_0^1 f(x)dx$ が成り立つことを示せ.

4) 以下では $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ とする.

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x \in K_f, \\ 0, & x \notin K_f \end{cases}$$

とし，g を二変数函数として積分することを考える．g は二変数函数として積分可能であることはここでは認める．定義に従って $\int_{K_f} g(x)dx$ を求めるためには，K_f（を含む，閉区間の直積）の様々な分割あるいは，分割から定まる過剰和，不足和を考える必要があるが，ここでは以下の形の過剰和，不足和のみを考える．即ち，$n \geq 1$ とし，$i, j = 0, \ldots, n-1$ について $I_{i,j;n} = I_{i;n} \times I_{j;n}$ と置き，$I_{i,j;n}$ により与えられる $[0,1] \times [0,1]$ の分割を Δ_n とする.

i) $S_n \leq \overline{s}(g; \Delta_n)$ 及び $s_n \geq \underline{s}(g; \Delta_n)$ が成り立つことを示せ.

ii) $\lim_{n\to+\infty} \overline{s}(g; \Delta_n) = \lim_{n\to+\infty} \underline{s}(g; \Delta_n) = \int_{K_f} g(x)dx$ が成り立つことを示せ.

iii) $\int_{K_f} g(x)dx = \int_0^1 f(x)dx$ が成り立つことを示せ.
※ 左辺の x は二変数で，右辺の x は一変数であるので注意せよ.

問 19.14. $n \in \mathbb{N}$ とし，$f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ を $f(x) = x^n$ により定める．ただし，$x^0 = 1$ と定める.

1) $\Delta = \{x_0, \ldots, x_k\}$ を $[0,1]$ の分割とするとき，過剰和 $\overline{s}(f; \Delta)$，不足和 $\underline{s}(f; \Delta)$ を求めよ．また，$i = 0, \ldots, k-1$ について $c_i \in [x_i, x_i + 1]$ とするとき，リーマン和 $s(f; \Delta, c)$ を求めよ.

2) $\delta(\Delta) \to 0$ とすると，1) の過剰和，不足和，リーマン和はいずれも $\dfrac{1}{n+1}$ に収束することを示せ.

問 19.15. $P \subset \mathbb{R}^n$ を閉区間の直積とし，$f\colon P \to \mathbb{R}$ は可積分とする．$p_1, \ldots, p_k \in P$ とし，$g\colon P \to \mathbb{R}$ は $P \setminus \{p_1, \ldots, p_k\}$ 上で f に等しいとする．このとき，g は P 上可積分であって，$\int_P g(x)dx = \int_P f(x)dx$ が成り立つことを示せ.

問 19.16. $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ を $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \cap [0,1], \\ 0, & x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ により定める.

1) $p \in [0,1]$ とすると，p において f は連続でないことを示せ.

2) $\inf_{\Delta}\overline{s}(f;\Delta)=1,\ \sup_{\Delta}\underline{s}(f;\Delta)=0$ が成り立つことを示せ．従って f は $[0,1]$ 上リーマン可積分でない．

3) Δ を $[0,1]$ の分割とする．

$$\forall n>0,\ \exists\Delta,c,\ \delta(\Delta)<\frac{1}{n},\ s(f;\Delta,c)=1$$

及び

$$\forall n>0,\ \exists\Delta,c,\ \delta(\Delta)<\frac{1}{n},\ s(f;\Delta,c)=0$$

が成り立つことを示せ．従って，f は $[0,1]$ 上リーマン可積分ではない．

問 19.17. $f\colon[0,1]\times[0,1]\to\mathbb{R}$ を $f(x,y)=x^2+y^2$ により定める．

1) 定義を用いるか，あるいは過剰和，不足和を用いて $\displaystyle\int_{[0,1]\times[0,1]}f(x,y)dxdy=\frac{2}{3}$ が成り立つことを示せ．

※ 結構面倒くさい．

2) 一変数函数の積分は高校までの要領で行って良いことにする（微積分学の基本定理（定理 **??**）を認める）．このとき，

$$F(y)=\int_0^1 f(x,y)dx\quad（y\text{ は一旦定数と考えて，}x\text{ のみについて積分する}），$$

$$G(x)=\int_0^1 f(x,y)dy$$

と定める．この時，

$$\int_{[0,1]}F(y)dy=\int_{[0,1]}G(x)dx=\frac{2}{3}=\int_{[0,1]\times[0,1]}f(x,y)dxdy$$

が成り立つことを示せ．

※ こちらは簡単である．

問 19.18. 次の極限（極限値）を求めよ．

1) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}$

2) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_1^2\log\left(n\sin\frac{x}{n}\right)dx$

逆写像定理と陰函数定理は同値な定理である．実際，陰函数定理において $n=0$ とすると逆写像定理が得られる．一方，逆写像定理から陰函数定理は次のように導かれる．ここでは $n=m=1$ とするが，一般の場合も同様である．

問 19.19 **．$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を C^r 級とし，$Df(a,b)$ の右側の 1×1 の部分は正則である（今の場合は 0 でない）とする．$F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ f(x,y) \end{pmatrix}$$

により定める．

1) F は C^r 級であることを確かめよ．また，

$$DF = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \multicolumn{2}{c}{Df} \end{pmatrix}$$

が成り立つことを示せ．

仮定により $Df(a,b)$ の右端の 1×1 の部分は正則である（今の場合には $Df(a,b)$ の $(1,2)$-成分は 0 でない）から，$\det DF(a,b) \neq 0$ が成り立つ．従って，逆写像定理により $p = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ を含む開集合 V が存在して，

i) $W = F(V)$ と置くと W は開集合である．

ii) F は V から W への C^r 級の微分同相写像である．

が成り立つ．ところで，$F(p) = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$ であるから $\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \in W$ が成り立つ．

3) $F^{-1}(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ h(u,v) \end{pmatrix}$ と表すことができることを示せ．また，

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = F \circ F^{-1}(u,v) = F(u, h(u,v)) = \begin{pmatrix} u \\ f(u, h(u,v)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ f(F^{-1}(u,v)) \end{pmatrix}$$

が成り立つが成り立つことを示せ．従って $v = f \circ F^{-1}(u,v)$ が成り立つ．

4) a を含む開区間 A' と b を含む開区間 B を十分小さく取れば $A' \times B \subset V$，$A' \times \{0\} \subset W$ が成り立つことを示せ（一般には開区間の直積を考える必要がある）．

5) A' 上の函数 g を $g(x) = h(x,0)$ により定めることができて，$F^{-1}(a,0) = \begin{pmatrix} a \\ h(a,0) \end{pmatrix}$ が成り立つことを示せ．

6) $h(a,0) = b$ が成り立つことを示せ．
ヒント：F は微分同相写像であって，$F^{-1}(a,0) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ が成り立つ．

7) $A = g^{-1}(B) = \{x \in A' \mid g(x) \in B\}$ と置けば A は A' に含まれる開集合で $g(A) \subset B$ が成り立つことを示せ．また $x \in A$ ならば $f(x, g(x)) = f(x, h(x,0)) = 0$ が成り立つことを示せ．

8) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in A \times B$ かつ $f(x,y)=0$ が成り立つとすると，$F(x,y)=F(x,g(x))$ が成り立つことを示せ．また，$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ g(x) \end{pmatrix}$ が成り立つことを示せ．

（以上）