2018 年度線型代数学演習（理 I 36–39 組向け，足助担当）問題 18 v3
’18/10/11（木）
改変履歴．’18/10/4 :（v1）初版作成．概ね 10/4 の講義の分までの内容である．
’18/10/10 :（v2）定義 18.15 を修正．概ね 10/11 の講義の分までの内容である．
’18/10/12 :（v3）問 18.6 を修正．問 18.32 と 18.33 を追加．

計量について

以下 $K = \mathbb{R}$ あるいは $K = \mathbb{C}$ とする．また，V を K-線型空間とし，$\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ を V のユークリッド計量（$K = \mathbb{R}$ の場合）あるいはエルミート計量（$K = \mathbb{C}$ の場合）とする．エルミート計量に関しては，$\langle \lambda v \mid w \rangle = \lambda \langle v \mid w \rangle$ としても，$\langle v \mid \lambda w \rangle = \lambda \langle v \mid w \rangle$ としても良いが，混用はしないこと．以下では前者を前提として記述する[†1]．

定義 18.1 (標準的な計量). 1) $v, w \in \mathbb{R}^n$ とし，$v = [v_i],\ w = [w_j]$ と成分で表す．

$$\langle v \mid w \rangle = \sum_{k=1}^{n} v_k w_k$$

により定まる $\mathbb{R}^n$ のユークリッド計量を **$\mathbb{R}^n$ の標準的なユークリッド計量**と呼ぶ．

2) $v, w \in \mathbb{C}^n$ とし，$v = [v_i],\ w = [w_j]$ と成分で表す．

$$\langle v \mid w \rangle = \sum_{k=1}^{n} v_k \overline{w_k}$$

により定まる $\mathbb{C}^n$ のユークリッド計量を **$\mathbb{C}^n$ の標準的なユークリッド計量**と呼ぶ．

定義 18.2 (直交補空間). $W \subset V$ を部分線型空間とする．

$$W^{\perp} = \{v \in V \mid \forall\, w \in W,\ \langle v \mid w \rangle = 0\}$$

と置いて，$\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ に関する W の**直交補空間**と呼ぶ．

定義 18.3. 1) $v, w \in V$ とする．v と w が**直交**するとは，$\langle v \mid w \rangle = 0$ が成り立つことを言う．このことを $v \perp w$ と表すことがある．

2) $W, U \subset V$ を部分線型空間とする．W と U が**直交**するとは

$$\forall\, w \in W,\ \forall\, u \in U,\ \langle w \mid u \rangle = 0$$

が成り立つことを言う．このことを $W \perp U$ と表すことがある．

[†1] 拙著「線型代数学」の記述は後者を前提としている．

3) $W, U \subset V$ を部分線型空間とする．$W \perp U$ であるとき，和空間 $W+U$ は**直交直和**であるといい，$W \oplus U$（直交直和）などと表す．直交直和の表し方には様々なものがあり，必ずしも一定しない．なお,「$W \oplus U$」とだけ記すと，単なる W と U の直和を表す．計量が関係なくなってしまい,「$W \oplus U$（直交直和)」とは異なることを表すので注意すること．

問 18.4. $v_1, \ldots, v_r \in V$ とし，$\forall i, j,\ i \neq j \Rightarrow \langle v_i \mid v_j \rangle = 0$ が成り立つとする（このとき $\{v_1, \ldots, v_r\}$ を**直交系**と呼ぶ）．いずれの v_i も零ベクトルでなければ $v_1, \ldots, v_r$ は線型独立であることを示せ．
ヒント：$\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in K$ として $w = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r$ と置く．$\langle w \mid v_i \rangle$ を $i = 1, \ldots, r$ について考えてみよ．

問 18.5 (問 18.4 も参照のこと．なお，直和に関しては第 13 回も参照のこと).

1) $W, U \subset V$ を部分線型空間とする．$W \perp U$ であるとき，和空間 $W+U$ は直和であることを示せ．
2) $W_1, \ldots, W_r \subset V$ を部分線型空間とする．$\forall i, j,\ i \neq j \Rightarrow W_i \perp W_j$ が成り立つならば $W_1 + \cdots + W_r$ は直和であることを示せ．

問 18.6. V は有限次元だとする．$W \subset V$ を部分線型空間とすると $V = W \oplus W^{\perp}$（直交直和）が成り立つことを示せ．
※ V が有限次元でないと，主張は必ずしも成り立たない[†2]．

問 18.32 ****.** $V = \{a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid a_n \in \mathbb{R}\}$ とする．V は実数列全体のなす線型空間である．また,（収束するかどうかは別として）$a = (a_n), b = (b_n) \in V$ について

$$\langle a \mid b \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n = \lim_{m\to+\infty} \sum_{n=0}^{m} a_n b_n$$

と置き（二つ目の等号は定義である），

$$\|a\| = \sqrt{\langle a \mid a \rangle} = \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2}$$

と定める（有限の値かどうかは取り敢えず気にしない）．最後に

$$\ell^2 = \{a \in V \mid |a| < +\infty\} = \left\{ a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \;\middle|\; \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| < +\infty \in \mathbb{R} \right\}$$

[†2] 今のところは「そういうものか」と思っていれば良い．ただ，この種の話を実際に用いる場面ではしばしば V は有限次元ではないのが苦しいところである．

と置く．

1) $a, b \in V$ について $\|a\|, \|b\|$ は有限の値だとする．このとき，

$$|\langle a \mid b\rangle| \leq \|a\| \, \|b\|$$

が成り立つことを示せ．

ヒント：例えば a を第 k 項で打ち切ったものを $a(k)$ とする．すると $\|a(k)\| \leq \|a\|$ が成り立つ．一方，$a(k), b(k)$ に関して，不等式は有限次元の場合の Cauchy–Schwarz の不等式そのものである（から成り立つ）．これらを踏まえて極限を適切にとればよい．

2) $U = \{a = (a_n) \in V \mid \exists\, m \in \mathbb{N},\ n \geq m \Rightarrow a_m = 0\}$ と置く．

i) U は ℓ^2 の部分線型空間であることを示せ．

ii) $e(k) \in V$ を $e(k)_n = \begin{cases} 1, & k = n, \\ 0, & k \neq n \end{cases}$ により定める．$e(k) \in U$ が成り立つことを確かめよ．また，$a = (a_n) \in V$ について，$\langle a \mid e(k)\rangle = 0 \Leftrightarrow a_k = 0$ が成り立つことを示せ．

iii)

$$U^{\perp} = \{a \in \ell^2 \mid \forall\, b \in U,\ \langle a \mid b\rangle = 0\} = \{0\}$$

が成り立つことを示せ．ここで 0 は全ての項が 0 であるような ℓ^2 の元である．

iv) $U \neq \ell^2$ が成り立つことを示せ．また，$\ell^2 = U \oplus U^{\perp}$（直交直和）は成り立たないことを示せ．

V が有限次元でも $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ がユークリッド計量やエルミート計量でないと，やはり困ったことが起きる．このような状況は例えば相対論で現れる．とはいえ，ユークリッド計量やエルミート計量の場合が基本的であるので，これは後で扱う（問 18.33）．

以下，V は有限次元とする．

問 18.7. $\{v_1, \ldots, v_n\}$ を V の正規直交基底とする．$v \in V$ について

$$v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$$

と表すと $\forall i,\ \lambda_i = \langle v \mid v_i\rangle$ が成り立つことを示せ．

※ 従って，v を上のように表すと，v_i の係数は v がどの程度 v_i 方向に向いているかを表していると考えることができる．

問 18.8. 1) $\mathscr{E} = (e_1, \ldots, e_n),\ \mathscr{F} = (f_1, \ldots, f_n)$ を V の順序付き正規直交基底とする．P を $\mathscr{E}$ から $\mathscr{F}$ への基底の変換行列とすると

i) $K=\mathbb{R}$ ならば ${}^tPP = P\,{}^tP = E_n$ が成り立つ（このような P を**直交行列**と呼ぶ）.

ii) $K=\mathbb{C}$ ならば $P^*P = PP^* = E_n$ が成り立つ（このような P を**ユニタリ行列**と呼ぶ）.

が成り立つことを示せ.

2) $\mathscr{E}$ を正規直交基底とし，P が直交行列（$K=\mathbb{R}$ の時）あるいはユニタリ行列（$K=\mathbb{C}$ の時）とする．$\mathscr{F}=\mathscr{E}P$ とすると，$\mathscr{F}$ は正規直交基底であることを示せ.

定義 18.9. $W\subset V$ を部分線型空間とする．$\{w_1,\dots,w_r\}$ を W の正規直交基底とする（存在は後で問の形で示す）．このとき，$\pi\colon V\to W$ を $v\in V$ について

$$\pi(v)=\sum_{i=1}^{r}\langle v \mid w_i\rangle w_i$$

と置くことにより定め，W への**直交射影**あるいは**正射影**と呼ぶ.

問 18.7 を踏まえると，$\pi(v)$ は v のうち，W に沿った方向を取り出して得られるベクトルと考えることができる.

問 18.10. $W\subset V$ を部分線型空間とする．$\mathscr{W}=\{w_1,\dots,w_r\}$, $\mathscr{W}'=\{w_1',\dots,w_r'\}$ を W の正規直交基底とする．$\pi_{\mathscr{W}}$ を $\mathscr{W}$ を用いて定めた直交射影，$\pi_{\mathscr{W}'}$ を $\mathscr{W}'$ を用いて定めた直交射影とすると $\pi_{\mathscr{W}}=\pi_{\mathscr{W}'}$ が成り立つことを示せ.

※ ヒント：$\mathscr{W}'=\mathscr{W}P$ とする．問 18.8 により P は直交行列あるいはユニタリ行列である．このとき，$P=(p_{ij})$ と成分で表すと

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{r}\langle v \mid w_i'\rangle w_i' &= \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{r}\langle v \mid p_{ji}w_j\rangle p_{ki}w_k\\ &= \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{r}\overline{p_{ji}}p_{ki}\langle v \mid w_j\rangle w_k\end{aligned}$$

が成り立つ．P は直交行列あるいはユニタリ行列であることに注意して計算をもう少し進めてみよ.

問 18.11. $V=K^n$ とし，標準的なユークリッド計量（$K=\mathbb{R}$ の場合）あるいは標準的なエルミート計量（$K=\mathbb{C}$ の場合）を考える．また，$(e_1,\dots,e_n)$ を K^n の標準的な順序付き基底とする．そして，$W\subset K^n$ を部分線型空間とし，$\{w_1,\dots,w_r\}$ を W の正規直交基底とする．また，$\pi\colon K^n\to W$ を W への直交射影とする.

1) $\{e_1,\dots,e_n\}$ は正規直交基底であることを示せ.

2) $w_i = \sum_{k=1}^{n} w_{ki} e_k$ と表すと，$w_i = \begin{bmatrix} w_{1i} \\ \vdots \\ w_{ni} \end{bmatrix}$ であって，また

$$\pi(e_k) = \sum_{i=1}^{n} \langle e_k \mid w_i \rangle w_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \overline{w_{ki}} w_{ji} e_j$$

が成り立つことを示せ．

3) π を K^n から K^n への写像とみなす．$A = (w_1 \ \cdots \ w_r) \in M_{n,r}(K)$ とすると，K^n の標準的な順序付き基底に関する π の表現行列は AA^* に等しいことを示せ．

問 18.12. $V(= K^n)$, W を以下のように定めるとき，V から W への直交射影の，V の標準的な（順序付き）基底に関する表現行列を求めよ．

1) $V = \mathbb{R}^3$, $W = \{v = {}^t[v_1 \ v_2] \mid av_1 + bv_2 = 0\}$，ただし $a, b \in \mathbb{R}$.
※ ヒント：場合分けが要る．

2) $V = \mathbb{R}^3$, $W = \{v = {}^t[v_1 \ v_2 \ v_3] \mid v_1 + v_2 + v_3 = 0\}$.

3) $V = \mathbb{R}^n$，$a = t[a_1 \ \cdots \ a_n] \in \mathbb{R}^n$ とし，$W = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \langle v \mid a \rangle = 0\}$ とする．ただし，$\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ は標準的なユークリッド計量とする．

3') $V = \mathbb{R}^n$，$a = t[a_1 \ \cdots \ a_n] \in \mathbb{R}^n$ とし，$W = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \langle v \mid a \rangle = 0\}$ とする．ただし，$\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ は $\mathbb{R}^n$ のユークリッド計量で，標準的な順序付き基底に関する表現行列が G であるようなものとする．

4) $V = \mathbb{C}^n$，$a = t[a_1 \ \cdots \ a_n] \in \mathbb{C}^n$ とし，$W = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \langle v \mid a \rangle = 0\}$ とする．ただし，$\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ は標準的なエルミート計量とする．

4') $V = \mathbb{C}^n$，$a = t[a_1 \ \cdots \ a_n] \in \mathbb{R}^n$ とし，$W = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \langle v \mid a \rangle = 0\}$ とする．ただし，$\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ は $\mathbb{C}^n$ のエルミート計量で，標準的な順序付き基底に関する表現行列が G であるようなものとする．

問 18.13. $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ を $\mathbb{R}^n$ のユークリッド計量とする．$\langle \cdot \mid \cdot \rangle' \colon \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ を，$v, w \in \mathbb{C}^n$ を $v = v_1 + \sqrt{-1} v_2$, $w = w_1 + \sqrt{-1} w_2$ と $v_1, v_2, w_1, w_2 \in \mathbb{R}^n$ を用いて表して

$$\langle v \mid w \rangle' = \langle v_1 \mid w_1 \rangle + \langle v_2 \mid w_2 \rangle + \sqrt{-1}(\langle v_2 \mid w_1 \rangle - \langle v_1 \mid w_2 \rangle)$$

により定めると $\langle \cdot \mid \cdot \rangle'$ は $\mathbb{C}^n$ のエルミート計量であることを示せ．また，$\mathbb{R}^n$ の標準的な順序付き基底に関する表現行列を G とするとき，$\mathbb{C}^n$ の標準的な順序付き基底に関する $\langle \cdot \mid \cdot \rangle'$ の表現行列を求めよ．

問 18.14. $C([0,1]) = \{f\colon [0,1] \to \mathbb{R} \mid f$ は連続$\}$ と置く．また，$\langle\cdot\mid\cdot\rangle\colon C([0,1])\times C([0,1]) \to \mathbb{R}$ を

$$\langle f \mid g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

により定める．$\langle\cdot\mid\cdot\rangle$ は $C([0,1])$ のユークリッド計量である（第 16 回）．また，$n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ について，$f_n, g_n \in C([0,1])$ を

$$f_n(x) = \sin 2n\pi x,$$

$$g_n(x) = \cos 2n\pi x$$

により定める．さらに，$g_0(x) = 1$ とする．以下，f_n, g_m の添字は単に $\mathbb{N}$ の元とするが，f_0 は考えないことにする．

1) $n, m \in \mathbb{N}$ について $\langle f_n \mid f_m\rangle$，$\langle g_n \mid g_m\rangle$，$\langle f_n \mid g_m\rangle$ をそれぞれ求めよ．

2) 1) を踏まえて，$a_n, b_m \in \mathbb{R}$ を適当に（適切に）定めて $f'_n = a_n f_n$，$g'm = b_m g_m$ と置いたとき，$\{f'_n, g'_m\}$ が正規直交系をなす，即ち

$$\langle f_n \mid f_m\rangle = \begin{cases} 1, & n = m, \\ 0, & n \neq m \end{cases},$$

$$\langle g_n \mid g_m\rangle = \begin{cases} 1, & n = m, \\ 0, & n \neq m \end{cases},$$

$$\langle f_n \mid g_m\rangle = 0$$

が成り立つようにせよ．

3) $H \subset C([0,1])$ を

$$\begin{aligned} H &= \langle f_n, g_m\rangle \\ &= \left\{ f \in C([0,1] \;\middle|\; \exists\, k, l \in \mathbb{N},\ \exists\, \lambda_1, \ldots, \lambda_k, \mu_0, \ldots, \mu_l \in \mathbb{R},\ f = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f_i + \sum_{j=1}^{l} \mu_j g_j \right\} \\ &= \left\{ f \in C([0,1] \;\middle|\; \exists\, k, l \in \mathbb{N},\ \exists\, \lambda'_1, \ldots, \lambda'_k, \mu'_0, \ldots, \mu'_l \in \mathbb{R},\ f = \sum_{i=1}^{k} \lambda'_i f'_i + \sum_{j=1}^{l} \mu'_j g'_j \right\} \end{aligned}$$

により定める（最後の等号が成り立つことは確かめよ）．また，π を $C([0,1])$ から H への直交射影とする．$f \in C([0,1])$ とし，

$$\pi(f) = \sum_{i=1}^{k} \lambda'_i f'_i + \sum_{j=1}^{l} \mu'_j g'_j$$

と表すとき，λ'_i, μ'_j を求めよ．

ヒント：λ'_i, μ'_j は内積により与えられるはずであるが，今は内積は積分により与えられている．必要であれば Fourier 展開について扱っている教科書（数学に関するものでなくともよい）を眺めるとよい．

注. 問 18.13 において，実際上は H ではなく，

$$\overline{H} = \left\{ f \in C([0,1]) \;\middle|\; \begin{array}{l} \exists \{\lambda'_i\}_{i \geq 0},\ \{\mu'_j\}_{j \in \mathbb{N}},\ \displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty} {\lambda'_i}^2 < +\infty,\ \sum_{j=0}^{+\infty} {\mu'_j}^2 < +\infty, \\ f = \displaystyle\lim_{m \to +\infty} \left(\sum_{i=1}^{m} \lambda'_i f'_i + \sum_{j=1}^{m} \mu'_j g'_j \right) \end{array} \right\}$$

を考えることが多い[†3]．これは Fourier 展開において得られるのが sin や cos の無限和（級数）であることに対応する．

定義 18.15 (鏡映). V を K-線型空間とし，$H \subset V$ を部分線型空間とする．また，$\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ を V の計量とし，$\pi\colon V \to H$ を H への直交射影とする．このとき，$v \in V$ について

$$r(v) = -v + 2\pi(v)$$

と定め，r を H に関する**鏡映** (reflection, reflexion) と呼ぶ．

問 18.16. V を K-線型空間とし，$H \subset V$ を部分線型空間とする．また，$\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ を V の計量とし，$\pi\colon V \to H$ を H への直交射影とする．そして，$r\colon V \to V$ を H に関する鏡映とする．

1) $r(v) = v - 2(v - \pi(v))$ および $\forall v \in V,\ r(r(v)) = v$ が成り立つことを示せ．後者をしばしば $r^2 = \mathrm{id}_V$ と表す．
2) 1) が何を意味しているか，幾何的（図形的）に解説せよ．

問 18.17. $\mathbb{R}^2$ と標準的なユークリッド計量を考える．また，部分線型空間 $W \subset \mathbb{R}^2$ について，W への直交射影を π_W とする．

1) $W, W' \subset \mathbb{R}^2$ を部分線型空間とする．$\pi_{W'} \circ \pi_W$ は原点に関する $\mathbb{R}^2$ の回転であることを示せ．
2) ρ を原点に関する $\mathbb{R}^2$ の回転とすると，$\mathbb{R}^2$ の部分線型空間 W, W' が存在して $\rho = \pi_{W'} \circ \pi_W$ が成り立つことを示せ．

ヒント：W を式で表して π_W を具体的に表してしまうと簡単である．よほど変なことをしない限り 1) と 2) はほとんど同時に解ける．

[†3] H は $C([0,1])$ に自然な位相を定めた場合，H の閉包である．この注は難しいので意味が分からなければ忘れて良い．

問 18.18 (グラム–シュミットの直交化法，正規直交基底の存在). $\{e_1, \dots, e_n\}$ を V の基底とする．このとき，V の正規直交基底 $\{f_1, \dots, f_n\}$ であって，性質

$$\forall\, k,\ \langle f_1, \dots, f_k\rangle = \langle e_1, \dots, e_k\rangle$$

を満たすものを次のように構成できる（求めることができる）ことを示せ（この構成法を Gram–Schmidt の（正規）直交化法と呼ぶ）．

1) $k \in \mathbb{N}$ とし，$f_1, \dots, f_k$ は既に構成できているとする．$k = 0$ の場合も許し，この場合にはまだ何も構成できていないと考える．さて，π_k を V から $\langle e_1, \dots, e_k\rangle$ への直交射影とする．そして，$e'_{k+1} = e_{k+1} - \pi_k(e_{k+1})$ と置く．
   a) $e'_{k+1} \neq 0$ が成り立つことを示せ．
   b) $f_{k+1} = \dfrac{e'_{k+1}}{\|e'_{k+1}\|}$ と置く．すると，$\langle f_1, \dots, f_{k+1}\rangle = \langle e_1, \dots, e_k\rangle$ が成り立ち，また，$\langle f_i \mid f_j\rangle = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j \end{cases}$ が $1 \leq i, j \leq k+1$ について成り立つことを示せ（$\{f_1, \dots, f_{k+1}\}$ は**正規直交系**をなす，という）．
   c) この操作を繰り返すと有限回で操作が終了して，$\{f_1, \dots, f_n\}$ が得られることを示せ．
2) 1) において
$$e'_{k+1} = e_{k+1} - \frac{1}{\|e_i\|^2}\sum_{i=1}^{k}\langle e_{k+1} \mid e_i\rangle e_i$$
が成り立つことを示せ．ただし，$k = 0$ の時には和は 0 と見なす．
ヒント：定義により $\pi_{k+1}(e_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k}\langle e_{k+1} \mid f_i\rangle f_i$ が成り立つ．これを帰納的に書き換えても良いし，$v \in \langle e_1, \dots, e_k\rangle$ について $\langle e'_{k+1} \mid v\rangle = 0$ が成り立つことを持ちいてもう少し直接的に示すこともできる．

問 18.19 (正規直交基底の拡大（延長）). $W \subset V$ を部分線型空間とし，$\{e_1, \dots, e_r\}$ を W の正規直交基底とする．このとき，$e_{r+1}, \dots, e_n$ を適当に選んで $\{e_1, \dots, e_n\}$ が V の正規直交基底であるようにできることを示せ．
ヒント：ひとまず正規直交基底であるかは忘れて $\{e_1, \dots, e_r\}$ を拡大して V の基底を作る．作った基底にグラム–シュミットの直交化法を適用してみよ．$e_1, \dots, e_r$ が変化しないことを示す必要がある．

今のところ「計量」でユークリッド計量やエルミート計量を指すが，これらとは異なる「計量」でよく用いられる重要なものが幾つかある．最も重要なものの一つは Lorentz 計量であ

る．Lorentz 計量は正値性を持たない．そのため，ユークリッド計量やエルミート計量の持つ様々な性質が失われる．

問 18.33. $v=(v_i), w=(w_i)\in\mathbb{R}^4$ について

$$\langle v \mid w\rangle = v_1w_1 - v_2w_2 - v_3w_3 - v_4w_4$$

と置き,（$\mathbb{R}^4$ 上の）**Lorentz 計量**と呼ぶ[†4]．また，$\mathscr{E}=(e_1,e_2,e_3,e_4)$ を $\mathbb{R}^4$ の標準的な順序付き基底とする．

1) Lorentz 計量はユークリッド計量ではないことを示せ．
2) $\mathscr{E}$ に関する Lorentz 計量の表現行列を求めよ（表現行列はユークリッド計量などの場合と同様に定める）．
3) Lorentz 計量は正値性以外のユークリッド計量に関する性質（双線型性及び対称性）を満たすことを示せ．また，$v\in\mathbb{R}^4$ とする．$\forall w\in\mathbb{R}^4,\ \langle v\mid w\rangle = 0$ が成り立つならば，$v=0$ が成り立つことを示せ．このことを $\langle\cdot\mid\cdot\rangle$ は**非退化**であるという．
4) $W\subset\mathbb{R}^4$ を部分線型空間とし，W への直交射影を求めたい．ユークリッド計量やエルミート計量の場合を踏まえて次のように定める．

   定義. $\pi_W\colon\mathbb{R}^4\to W$ が W への直交射影であるとは，
   i) $\forall v\in\mathbb{R}^4,\ \pi_W(v)\in W$.
   ii) $\forall v\in\mathbb{R}^4,\ \forall w\in W,\ \langle v-\pi_W(v)\mid w\rangle = 0$
   が成り立つことを言う．

5) $W^\perp=\{v\in\mathbb{R}^4\mid \forall w\in W,\ \langle v\mid w\rangle=0\}$ とすれば,「定義」の二番目の条件は $\forall v\in\mathbb{R}^4,\ v-\pi_W(v)\in W^\perp$ と同値であることを確かめよ．
6) $W=\langle e_1\rangle=\mathbb{R}e_1$ あるいは $W=\langle e_2,e_3,e_4\rangle$ とする．π_W が一意的に存在することを示せ．
7) $W=\langle e_1+e_2\rangle$ とする．
   a) $\{e_1+e_2\}$ は W の基底であるが，これを実数倍して大きさを 1 にすることはできないことを示せ．また，$f_2,f_3,f_4\in\mathbb{R}^4$ を選んで $\{e_1+e_2,f_2,f_3,f_4\}$ が直交系かつ $\mathbb{R}^4$ の基底であるようにはできないことを示せ．
      ※ 従って，Gram–Schmidt の直交化法のようなことは一般にはできない．

[†4] Lorentz 計量は符号を逆にして，$\langle v\mid w\rangle = -v_1w_1+v_2w_2+v_3w_3+v_4w_4$ とすることも多い．

b) 「定義」のような π_W が存在したとする．このとき，任意の $\lambda \in \mathbb{R}$ について $\lambda\pi_W$ も同様の性質を満たすことを示せ．また，実際にはこのような π_W は存在しないことを示せ．

ヒント：$\forall\, w, w' \in W,\ \langle w \mid w' \rangle = 0$ が成り立つ．

8) 「定義」のような π_W が存在するための W に関する条件（必要十分条件）を求めよ．

定義 18.20. V を線型空間とする（計量は入っていてもいなくても良い）．線型写像 $f\colon V \to V$ を，V から自分自身への写像と考えるとき，f を V の**線型変換**と呼ぶ．

定義 18.21. V, W を線型空間とし，それぞれ計量 $\langle \cdot \mid \cdot \rangle_V, \langle \cdot \mid \cdot \rangle_W$ が入っているとする．線型写像 $f\colon V \to W$ が**計量を保つ**あるいは**等長的**であるとは，

$$\forall\, v, v' \in V,\ \langle f(v) \mid f(v') \rangle_W = \langle v \mid v' \rangle_V$$

が成り立つことを言う．$V = W,\ \langle \cdot \mid \cdot \rangle_V = \langle \cdot \mid \cdot \rangle_W$ であって，f を線型変換と考えるときには，計量を保つ線型変換を**等長変換**と呼ぶ（計量を保つ線型変換と呼んでも間違いではない）．

問 18.22. 1) $V = \mathbb{R}^n$ とし，ユークリッド計量を考える．また，$\mathscr{E}$ を V の正規直交基底とする．f を V の等長変換とし，A を $\mathscr{E}$ に関する表現行列とすると $A \in \mathrm{O}_n$ が成り立つ，即ち，${}^t\!A\,A = A\,{}^t\!A = E_n$ が成り立つことを示せ．また，逆も成り立つことを示せ．

2) $V = \mathbb{C}^n$ とし，エルミート計量を考える．また，$\mathscr{E}$ を V の正規直交基底とする．f を V の等長変換とし，A を $\mathscr{E}$ に関する表現行列とすると $A \in \mathrm{U}_n$ が成り立つ，即ち，$A^*A = A\,A^* = E_n$ が成り立つことを示せ．また，逆も成り立つことを示せ．ここで $A^* = {}^t\overline{A}$ は A の随伴行列を表す（これは一般的な記号である）．

3) 1), 2) において V は K^n である必要はなく，一般の n 次元 K-線型空間（と計量）で良いことを示せ．

問 18.23. $H \subset V$ を部分線型空間とし，H に関する鏡映を r とする．r は等長変換であることを示せ．

問 18.24 (第 8 回も参照のこと). $\mathbb{R}^n$ と，標準的なユークリッド計量を考える．さて，$A\colon \mathbb{R} \to M_n(\mathbb{R})$ は微分可能だとする（A を成分を用いて表したとき，各成分が微分可能だとする）．また，

$$\forall\, t \in \mathbb{R},\ A(t) \in \mathrm{O}_n,$$

$$A(0) = E_n$$

が成り立つとする．$v, w \in \mathbb{R}^n$ について $F(t; v, w) = \langle A(t)v \mid A(t)w \rangle$ と置く．

1) $\forall v, w \in \mathbb{R}^n,\ F(t; v, w) = {}^t v\, {}^t A(t) A(t) w = F(0; v, w)$ が成り立つことを示せ．

2) $\forall v, w \in \mathbb{R}^n,\ \dfrac{d}{dt} F(t; v, w) = 0$ が成り立つことを示せ．

3) $X = \dfrac{dA}{dt}(0)$ とすると，

$$ {}^t X + X = O_n $$

が成り立つことを示せ．従って X は**歪対称行列**であって，$X \in \mathfrak{o}_n$ が成り立つ．

定義 18.25. $A, B \in M_n(K)$ について

$$ [A, B] = AB - BA \in M_n(K) $$

と定め，A と B の **Lie 括弧積**あるいは **Lie bracket** と呼ぶ．

問 18.26. 1) $A, B, C \in M_n(K)$ とする．

$$ [B, A] = -[A, B] $$

が成り立つことを示せ．また，

$$ [A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = O_n $$

が成り立つことを示せ．後者を **Jacobi 恒等式**と呼ぶ．

2) Jacobi 恒等式は

$$ [A, [B, C]] = [[A, B], C] + [B, [A, C]] $$

と書き直せることを示せ．

※ 従って，例えば $L_A(X) = [A, X]$ と置くと $L_A([B, C]) = [L_A(B), C] + [B, L_A(C)]$ が成り立つ．$[B, C]$ を B と C の積と考えることにすると，これは L_A が函数の微分と同様に Leibnitz 則を満たすことを意味する．

3) $X, Y \in \mathfrak{o}_n$ とする．$[X, Y] \in \mathfrak{o}_n$ が成り立つことを示せ．

4) $A\colon \mathbb{R} \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ は微分可能だとする．このとき，

$$ \frac{dA^{-1}}{dt}(t) = -A^{-1}(t) \frac{dA}{dt}(t) A^{-1}(t) $$

が成り立つことを示せ．ただし $A^{-1}(t) = A(t)^{-1}$ である．

5) $A\colon \mathbb{R} \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ は微分可能だとし，また，$A(0) = E_n$ が成り立つとする．また，$Y \in M_n(\mathbb{R})$ について

$$ G(t) = A(t) Y A(t)^{-1} $$

と置く．$X = \dfrac{dA}{dt}(0)$ とすると

$$\frac{dG}{dt}(t) = [X, Y]$$

が成り立つことを示せ．

※ 応用上はテンソル解析などで良く現れる．

行列式について

注 18.27. 行列式の定義には同値なものがいくつもある．例えば

1) 置換やその符号を用いて，行列の成分の多項式として定める．
2) 展開公式を用いて（より次数の低い行列の行列式の場合に帰着して）定める．
3) 多重線型性，交代性などを用いて,「～を満たすものは一意的なので，それを行列式と呼ぶ」として定める．
4) 行列式の絶対値は，行列から定まるある図形の体積であるとし，符号は別途定めて行列式とする．

といったことができる．もちろんこれらは全て同値である（どれかを定義として採ればほかは証明できる）．何かを証明するとなった場合にはどれを定義としているか気にする必要が生じることもあるが，単に行列式を用いる場合には都合の良いものを用いれば良い．

問 18.28. $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ とする．$E_\sigma = (a_{ij}) \in M_n(K)$ を

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & j = \sigma(i), \\ 0, & j \neq \sigma(i) \end{cases}$$

により定める．このとき $\det E_\sigma = \operatorname{sgn} \sigma$ が成り立つことを示せ．

注 18.29. 「$\mathfrak{S}$」は S のフラクトゥール体である．書ければそれに越したことはないが，要は「S」なので，ほかに S で表されるものがなければ「S」と書いてしまって構わない．問題はほかに「S」があるときで，この時は（あまりお行儀は良くないが）なんとかそれっぽく書いて「S」と区別する必要が生じる．

問 18.30. $f_1, \dots, f_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ は微分可能とする．$F(t) = \det[f_1(t) \ \cdots f_n(t)]$ とすると $F \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は微分可能であることを示せ．また，

$$DF = \det[Df_1 \ f_2 \ \cdots \ f_n] + \det[f_1 \ Df_2 \ f_3 \ \cdots \ f_n] + \cdots + \det[f_1 \ \cdots \ f_{n-1} \ Df_n]$$

が成り立つことを示せ．

問 18.31. 1) $A \in \mathrm{O}_n$ とする．$\det A = \pm 1$ が成り立つことを示せ．

2) $A \in \mathrm{U}_n$ とする．$|\det A| = 1$ が成り立つことを示せ．

（以上）