2018 年度微分積分学演習（理 I 36–39 組向け，足助担当）問題 17 v3

'18/10/4（木）

改変履歴．'18/9/26：（v1）初版作成．概ね 10/1 の講義の分までの内容である．

'18/10/3：（v2）問 17.5 以降を追加．

'18/10/4:（v3）問 17.2 を差し替え（v2 以前のものが間違っていたわけではないが,「ベクトル解析」などで扱う内容が含まれていたり，過度に難しくなってしまっていた）．問 17.3，17.8 の誤植を修正．問 17.4 を修正のうえ問を追加．問 17.12 を追加．

問 17.1 (問16.1も参照のこと). $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ とし（A を正則な n 次実行列とし），$f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を $f(x) = Ax$ により定める．ここで $x \in \mathbb{R}^n$ は列ベクトルとみなしている．f は C^∞ 級の微分同相写像であることを示せ．また，f^{-1} を求めよ．

問 17.2. 以下（i) から iv)）のように $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ p$ を定める．また，$l = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = f(p)\}$ とする．それぞれについて以下の問に答えよ．

1) $q \in l$ について $Df(q) \neq 0$（零ベクトル）が成り立つことを示せ．
2) $q = (q_1, q_2) \in l$ とする．q を含む開集合 $U \subset \mathbb{R}^2$，開区間 $I, J \subset \mathbb{R}$ で，$0 \in J$ が成り立つようなものが存在して以下のいずれかが成り立つことを示せ．
   a) $q_1 \in I$ とできて，$\varphi(x, y) = (x, f(x, y) - f(p))$ と置くと，$\varphi\colon U \to I \times J$ は C^1 級の微分同相写像である（実際には C^∞ 級である）．
   b) $q_2 \in I$ とできて，$\varphi(x, y) = (f(x, y) - f(p), y)$ と置くと，$\varphi\colon U \to J \times I$ は C^1 級の微分同相写像である（実際には C^∞ 級である）．

   いずれの場合についても φ^{-1} を求め，また，$f \circ \varphi^{-1}(t, s) = s + f(p)$ が成り立つことを示せ．更に，$Df(q) \in M_{1,2}(\mathbb{R})$ の第 2 成分が 0 でなければ a) が，第 1 成分が 0 でなければ b) がそれぞれ成り立つことを示せ．

i) $f(x, y) = ax + by + c$，ただし $a, b, c \in \mathbb{R},\ (a, b) \neq (0, 0)$ とする．また，$p = (p_1, p_2)$ とする．
ii) $f(x, y) = x^2 + y^2,\ p = (0, 1)$
iii) $f(x, y) = x^2 - y^2,\ p = (1, 0)$
iv) $f(x, y) = 4x^2 + y^2,\ p = (1, 0)$

ヒント：$f(x, y) = f(p)$ を x あるいは y に関して解くとおおよそ何をすれば良いか見えてくる．すぐに解けない場合には工夫が要る．なお，U, I, J を定めると φ は一意的である．

問 17.3. $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を $f(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ により定める．また，

$$U = (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R},$$
$$W = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \exists r \in (1/2, 3/2),\ \theta \in (-\pi/6, \pi/6),\ (x,y) = f(r,\theta)\}$$

と置く．

1) $(r_0, \theta_0) \in U$ とする．$\epsilon > 0$ が存在して，

a) $V = (r_0 - \epsilon, r_0 + \epsilon) \times (\theta_0 - \epsilon, \theta_0 + \epsilon)$ とすると，$V \subset U$ が成り立つ．

b) f による V の像 $f(V)$ は $\mathbb{R}^2$ の開集合である．

c) f の V への制限 $f|_V$ は V から $f(V)$ への微分同相写像である．

が成り立つことを示せ．また，$f|_V$ の逆写像を求めよ．

2) $f(W)$ は $\mathbb{R}^2$ の開集合であることを示せ．

3*) 開集合 $X \subset \mathbb{R}^2$ で，$f|_X$ が X から $f(W)$ への微分同相写像となるようなものを全て求めよ．

問 17.4. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $f(x) = x^3(x^2 - 1)$ により定める．

0) f は C^∞ 級であることを確かめよ．また，Df を求めよ．

※ この小問は単独では発表に用いないこと．

1) $x_0 \neq 0,\ \pm\sqrt{\dfrac{3}{5}}$ とする．$\delta > 0$ が存在して $U = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ と置くと，

a) $f(U)$ は開区間である．

b) $f|_U$ は U から $f(U)$ への C^∞ 級の微分同相写像である．

が成り立つことを示せ．また，$f|_U$ の逆写像を求めよ．

2*) $x_0 = 0$ とする．$Df(x_0) = 0$ が成り立つことを確かめよ．また，$\delta > 0$ が存在して $U = (-\delta, \delta)$ と置くと，

a) $f(U)$ は開区間である．

b) $f|_U$ は U から $f(U)$ への同相写像（C^0 級の微分同相写像）である．

が成り立つことを示せ．また，$f|_U$ の逆写像を求めよ．

※ $f|_U$ は C^∞ 級である．

3**) $x_0 = \sqrt{\dfrac{3}{5}}$ とする．$Df(x_0) = 0$ が成り立つことを確かめよ．また，$\delta > 0$ として $U = (-\delta, \delta)$ と置くと，

a) $f(U)$ は開区間ではない（実際には半開区間である）．

b) $\delta > 0$ をどのように取っても $f|_U$ は U から $f(U)$ への同相写像（C^0 級の微分同相写像）とはならない．

が成り立つことを示せ．

以下の問はS2ターム末試験において，いかにも勘違いあるいは誤解に基づいて解答がなされたと考えられることを元に作成した．

注． 講義では「ヘシアン（Hessian）」でHessian matrix（ヘッセ行列）を表した．これは標準的な用語であるが，一方,「ヘシアン」でヘッセ行列の行列式を指すこともある．これも標準的な用語であるので,「ヘシアン」がどちらを指しているかは前後関係から判断するのが無難である．例えば二変数以上の函数に関して「ヘシアン」が 2×2 以上のサイズの行列に値を取っているならばそれはヘッセ行列のことであるし，一方，実数に値を取っていればそれはヘッセ行列の行列式である．また，著者（筆者）がどちらを用いるのか分かっていれば話は簡単である．通常は少なくとも同一の文献の中では用語は一貫しているはずである[†1]．

問 17.5. ここでは函数は C^2 級とする．以下の1) から7) のように $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を定める．各々について以下の作業 i) から v) を行え．なお，変数は (x, y) とする．

1) $f(x,y) = x^2 + y^2$
2) $f(x,y) = x^3 + y^2$,
3) $f(x,y) = x^4 + y^2$,
4) $f(x,y) = x^2 + y^4$,
5) $f(x,y) = x^3 + y^4$,
6) $f(x,y) = x^4 + y^4$,
7) $f(x,y) = -x^2 - y^2$

i) $(p,q) \in \mathbb{R}^2$ における全微分 $Df(p,q)$ を求めよ．Df は行列で表しても良いし，微分形式で表しても良い．なお，線型写像で表しても良いが，表し方に注意しないとすぐにおかしくなる[†2]．これらがどのような意味で等しいかは，やや難しいので後回し（「函数の全微分について」）とする．

ii) $(p,q) \in \mathbb{R}^2$ におけるヘシアン $Hf(p,q)$ を求めよ．なお，ここでは講義や試験と同様に「ヘシアン」はヘッセ行列を意味する．

iii) f の臨界点（停留点）を全て求めよ．
※ 極大点あるいは極小点は臨界点ではないとするのは，正方形は四角形でないというのに似た誤りである．

iv) $c \in \mathbb{R}^2$ を f の臨界点とする．$Hf(c)$ の固有値（重複を込めて数えれば常に二つ存在する[†3]）を全て求めよ．

[†1] それでも，本のように長くなるとついついおかしくなることもままある．

[†2] 全微分を線型写像で表そうとしておかしくなっていると思われる解答が散見された．

[†3] 例えば $Hf(c) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ とすると，$Hf(c)$ の固有値は1のみであるが，1が二つあると考えられるので，重複を込めて数えれば固有値は二つ（1と1）存在する．

v) f の臨界点について，それが極大点，極小点，広義の極大点，広義の極小点であるか否か判定せよ．

問 17.6. $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ は C^2 級とし，$c \in \mathbb{R}^2$ を f の臨界点とする．以下の主張は全て偽である．反例を一つずつ挙げよ[†4]．

1) $Hf(c)$ が半正値ならば c は f の極大点でも極小点でもない．
2) $Hf(c)$ が半正値ならば c は f の広義の極大点でも広義の極小点でもない．
3) $Hf(c)$ が半負値ならば c は f の極大点でも極小点でもない．
4) $Hf(c)$ が半負値ならば c は f の広義の極大点でも広義の極小点でもない．
5) $\det Hf(c) > 0$ ならば c は f の極小点である．
6) $\det Hf(c) > 0$ ならば c は f の広義の極小点である．
7) $\det Hf(c) \neq 0$ ならば c は f の極小点あるいは極大点である．
8) $\det Hf(c) \neq 0$ ならば c は f の広義の極小点あるいは広義の極大点である．

※ ヘシアンによる極値判定はヘシアンが正則でなければ全く不可能である．また，ヘシアンの行列式だけを用いても，やはり極値判定は不可能である．

ヘシアン（のみ）による判定法が有効でない場合には何らかの別な手段をとる必要がある．

問 17.7. 1) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ は連続とし，また，$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x, y) \geq 0$ が成り立つとする．このとき，f の零点（$f(c) = 0$ を満たす $c \in \mathbb{R}^2$）は f の広義の極小点であることを示せ．

2) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ は C^2 級だとする．$c \in \mathbb{R}^2$ は f の広義の極小点であって，更に $\det Hf(c) > 0$ が成り立つとする．このとき，c は f の極小点であることを示せ．

問 17.8. 1) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ は C^2 級とし，$c = (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$ を f の臨界点とする．また，$f(c) = 0$ とする．このとき，以下のいずれの主張も偽である．反例を一つずつ挙げよ．

a) 条件

$$\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ f(c_1 + t, c_2) > 0,$$
$$\forall s \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ f(c_1, c_2 + s) > 0$$

が成り立つならば c は f の極小点である．

[†4] 主張を満たさない f と c の例を一つずつ挙げよ．

a') 条件

$$\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ f(c_1 + t, c_2) > 0,$$
$$\forall s \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ f(c_1, c_2 + s) > 0$$

が成り立つならば c は f の広義の極小点である．

2) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ とする．$(a,b) \in \mathbb{R}^2$ について $g_{a,b}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を

$$g_{a,b}(t) = f(at, bt)$$

により定める．f は次の条件をみたすとする．

$$(*) \quad \begin{cases} \text{任意の } (a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \text{ について，} g_{a,b} \text{ は微分可能であって } 0 \in \mathbb{R} \text{ は } g_{a,b} \text{ の} \\ \text{極小点である．} \end{cases}$$

さて，主張

$$(0,0) \in \mathbb{R}^2 \text{ は } f \text{ の極小点である．}$$

について考える．

a) f は C^1 級だとする．このとき，

$$Dg_{a,b}(t) = Df(at, bt) \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

が成り立つことを示せ．また，$(0,0) \in \mathbb{R}^2$ は f の臨界点であることを示せ．

b) f は C^2 級だとする．

i)

$$D^2 g_{a,b}(t) = [a\ b] Hf(at, bt) \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

が成り立つことを示せ．

ii) $\det Hf(0,0) \neq 0$ とすると，$Hf(0,0)$ は負値（負定値）であることを示せ．従ってこの場合には $(0,0)$ は f の極小点である．

c) $f(x,y) = (x^2 + y^2 - 2x)(x^2 + y^2 - 4x)$ とする．f は C^∞ 級であって，条件 $(*)$ をみたすことを示せ．また，$(0,0)$ は f の臨界点であるが，極小点ではないことを示せ．
※ 実際には $(0,0)$ は鞍点である（従って極大点でもないし，広義の極小点でもない）．

d) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^4 y^2}{x^8 + y^4}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ とする．f は条件 $(*)$ を満たすが，$(0,0)$ において連続でないことを示せ．

函数の全微分について *

$f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を C^1 級とする．このとき，f の全微分 Df が定まり，$x \in \mathbb{R}^n$ について $Df(x) \in M_{1,n}(\mathbb{R})$ が成り立ち，更に詳しく，$\mathbb{R}^n$ の座標を $(x_1, \ldots, x_n)$ とすると

$$Df = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$$

が成り立つのであった．

一方，df を

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n$$

で表し，f の全微分と呼ぶこともある．後者は常微分方程式（特に全微分方程式）を扱うとよく現れる．同じ名前がついているのだから，Df と df は何らかの意味で同一でないと困る．実際，これらは以下の意味で同一である．

定義 17.9. dx_i を，線型写像 $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ であって，$\mathbb{R}^n$ の基本ベクトル $e_1, \ldots, e_n$ について

$$dx_i(e_j) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

を満たすものとする．

問 17.10. dx_i は一意的に定まることを示せ．

問 17.11. $x \in \mathbb{R}^n$ とし，線型写像 $\varphi_x\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を $v \in \mathbb{R}^n$ について

$$\varphi_x(v) = Df(x)v$$

と置くことにより定める．

$$df_x(v) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)dx_i(v)$$

と定めれば，$\varphi_x = df_x$ が成り立つことを示せ．つまり，df_x を線型写像と考えたときの表現行列が $Df(x)$ である．

df や dx_i は**微分形式**と呼ばれるものであって，常微分方程式に限らず，数学では至る所に現れる．また，明示的にかはともかく，物理や化学，生物などの数学以外の分野（のうち，よく数学を用いるところ）でも良く現れる．微分方程式以外には例えばテンソル（テンソル場）を扱う際に決定的に現れる．微分形式は**ベクトル**や**ベクトル場**と関連が深い（双対である）．微分形式やベクトル場に関しては，教員によるが常微分方程式やベクトル解析の講義で入門的なことを（直接，あるいは間接的に）扱う．

問 17.12. V を K-線型空間とし，$\{v_1, \ldots, v_n\}$ を V の K 上の基底とする．また，W を線型空間とし，$f, g \colon V \to W$ を K-線型写像とそる．$f = g$ が成り立つことと，$\forall i,\ f(v_i) = g(v_i)$ が成り立つことは同値であることを示せ．

（以上）