2018 年度幾何学 III 演習問題 3 v1
'18/10/16（火）
改変履歴．'18/10/17 :（v1）初版作成．概ね 10/16 の講義の分までの内容である．

・原則として講義の記号を用いる．
・「$*$」がついている問はやや進んだ事柄であったり，専門的な事柄（研究に近い事柄を扱わないとあまり現れない事柄）に関するものである．これらについては解くのは後回しにして構わない.「$*$」の数が多いほどその度合いは高い．
・講義での節に合わせて問題を分けている．概ねその節で扱ったことに関する問題であるが，時々それ以前に扱ったことに関する問が含まれる．

多様体の向き

問 3.1. 1) M が向き付け可能であることと，M の座標近傍系 $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ であって，任意の α, β, $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$ について $\det D\varphi_{\beta\alpha} > 0$ が成り立つものが存在することと同値であることを示せ．

2) M は向き付け可能であるとし，座標近傍系 $\mathscr{U}$ は M に向きを定めるとする．

$$\mathscr{V} = \{\mathscr{U} \text{ と整合的な座標近傍全体}\},$$
$$\mathscr{W} = \{\mathscr{U} \text{ と整合的でない座標近傍全体}\}$$

とすると，$\mathscr{V}, \mathscr{W}$ はいずれも M に向きを定める座標近傍系であって，$\mathscr{V}$ は $\mathscr{U}$ と同じ向きを，$\mathscr{W}$ は $\mathscr{U}$ と逆の向きを定めることを示せ．

問 3.2. 1) S^1 は向き付け可能であることを示せ．

2) E をメビウスの帯（の全空間）とすると，E には向きが入らないことを説明せよ．可能であれば証明せよ．

問 3.3. $f_{*p}(v)$ は well-defined であることを示せ．また，$V \subset N$ を開集合，$U = f^{-1}(V)$ とする．U, V はそれぞれ座標近傍だとし，φ_U, φ_V をそれぞれ座標函数とする．また，$(x_1, \ldots, x_m)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ をそれぞれ $\varphi_U(U), \varphi_V(V)$ の座標とする．このとき，$\varphi_V \circ f \circ \varphi_V = (f_1, \ldots, f_n)$ と表すと

$$f_{*p}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}_p\right) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\varphi_U(p)) \frac{\partial}{\partial y_i}_{f(p)} \tag{3.4}$$

が成り立つことを示せ．従って，$\bar{f} = \varphi_V \circ f \circ \varphi_U^{-1}$ と置けば，$\left(\dfrac{\partial}{\partial x_1}_p, \dots, \dfrac{\partial}{\partial x_m}_p\right)$，$\left(\dfrac{\partial}{\partial y_1}_{f(p)}, \dots, \dfrac{\partial}{\partial y_n}_{f(p)}\right)$ に関する f_{*p} の表現行列は $D\bar{f}(\varphi_U(p)) = \left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(\varphi_U(p))\right)$ に等しい．
ヒント：前半は補題 1.3.4 と似たようなものである．

このように，座標函数をいちいち記すと煩雑になるので，実際にはしばしば省略する．例えば式 (3.4) は

$$f_{*p}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}_p\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p) \frac{\partial}{\partial y_i}_{f(p)}$$

などと表してしまったりするので注意を要する．

問 3.5. $\pi\colon E \to M$ をベクトル束とし，$(e_1, \dots, e_r)$ を $U \subset M$ 上の局所枠とする．$(e_1^*, \dots, e_r^*)$ を $(e_1, \dots, e_r)$ の双対枠とすると，$p \in U$ について $(e_1^*(p), \dots, e_r^*(p))$ は E_p^* の，$(e_1(p), \dots, e_r(p))$ に双対な基底であることを示せ．

問 3.6. ベクトル束 $\pi\colon E \to M$ は向き付けられているとする．

1) 定義 1.5.10 により確かに $\pi^*\colon E^* \to M$ には向きが定まることを示せ．
2) $\pi^*\colon T^*M \to M$ が（ベクトル束として）向き付け可能なのは M が向き付け可能であるとき，その時のみであることを示せ．

問 3.7. $\pi\colon M \times \mathbb{R} \to M$ を自明束（自明なベクトル束）とする．$\Omega^0(U) = \Gamma_U(M \times \mathbb{R})$ と自然にみなせる（$C^\infty(U)$ 加群としての自然な同型が存在する）ことを示せ．
※ 一般には「自然でない」同型が沢山存在する．一方，自然なものは一つと言って良い．

（以上）