2018 年度幾何学 III 演習問題 2 v1

'18/10/9（火）

改変履歴．'18/10/7 :（v1）初版作成．10/9 の講義の分までの内容である．

・原則として講義の記号を用いる．

・「$*$」がついている問はやや進んだ事柄であったり，専門的な事柄（研究に近い事柄を扱わないとあまり現れない事柄）に関するものである．これらについては解くのは後回しにして構わない．「$*$」の数が多いほどその度合いは高い．

・講義での節に合わせて問題を分けている．概ねその節で扱ったことに関する問題であるが，時々それ以前に扱ったことに関する問が含まれる．

ベクトル束の向き

問 2.1. $\pi\colon E \to M$ は向き付け可能であるとし，$\mathscr{U} = \{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ を（講義の）定義 1.2.2 のような局所自明化の族とする．$\iota\colon \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^r$ を $\iota(x_1, \ldots, x_r) = \iota(-x_1, x_2, \ldots, x_r)$ により定め，$\psi'_\alpha = (\mathrm{id}_{U_\alpha}, \iota \circ \mathrm{pr}_2 \circ \psi_\alpha)$ とすれば $-\mathscr{U} = \{(U_\alpha, \psi'_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ は $\mathscr{U}$ と異なる向きを定めることを示せ．ここで $\mathrm{pr}_2\colon U_\alpha \times \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^r$ は第二成分への射影である．この向きを $\mathscr{U}$ の定める向きと逆の向きと呼ぶことがある．

※ 「$-\mathscr{U}$」はここでの記号である．

問 2.2. M は連結だとする．$\pi\colon E \to M$ は向き付け可能であるとし，$\mathscr{U} = \{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ は E の向きを定めるとする．$\mathscr{V}$ も E の向きを定めるならば，$\mathscr{V}$ は $\mathscr{U}$ あるいは $-\mathscr{U}$ のいずれか一方，いずれか一方のみと同じ向きを定めることを示せ．従ってある向きに関して，それと異なる向きは逆の向きである．

問 2.3. 1) 自明束は向き付け可能であることを示せ．

2) $\pi\colon E \to S^1$ をメビウスの帯とすると，これは向き付け不可能であることを示せ．
ヒント : 示し方は幾つかある．例えばホモロジーを用いても良い．また，E が自明であるならば，自明な切断の像を再び S^1 で表すと $E \setminus S^1$ は連結でないが，実際には $E \setminus S^1$ は連結であることを示しても良い．なお，$E \setminus S^1$ を考えることは図形的には E を「中心線」で切り離すことを意味する．

接空間と接束

問 2.4. 定義 1.3.3 の $\sim$ は同値関係であることを確かめよ．

問 2.5 *. M の開被覆 $\{U_\alpha\}$ とコサイクル $\rho = \{\rho_{\beta\alpha}\}$ から演習の問 1.2 のようにベクトル束 E_ρ を定めると，$\pi\colon E_\rho \to M$ には自然に C^∞ 級のベクトル束の構造が定まり，この構造は開被覆によらないことを示せ．また，任意の α, β について $\rho_{\beta\alpha}$ が向きを保つならば E_ρ は向き付け可能であることを示せ．
※ そもそも E_ρ が多様体であることや，π が連続，さらには C^∞ 級であることなどを示す必要がある．

問 2.6. M を C^r 級の多様体とすると TM は C^{r-1} 級の多様体であることを示せ．

問 2.7. $\mathfrak{X}(U)$ は $C^\infty(U)$-加群であることを確かめよ．

問 2.8. 1) 任意の $X \subset M$ に関して $C^\infty(M) \subset C^\infty(X)$ が成り立つことを示せ．
2) $X \subset Y \subset M$ ならば $C^\infty(Y) \subset C^\infty(X)$ が成り立つことを示せ．特に，任意の $X \subset M$ について $C^\infty(M) \subset C^\infty(X)$ が成り立つ．
3) $C^\infty(X)$ は単位可換環であることを示せ．
※ 関連して，写像の芽（germ）に関して調べてみよ．

問 2.9. 切断 $X\colon U \to TM$ が C^∞ 級である，即ち $X \in \mathfrak{X}(U)$ が成り立つのは，$f_1, \dots, f_n\colon U \to \mathbb{R}$ を条件

$$X = f_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + f_n \frac{\partial}{\partial x_n}$$

により定めたとき，各 f_i が C^∞ 級であるとき，その時のみであることを示せ．

問 2.10. M を多様体とし，$i = 1, 2$ について (U_i, φ_i) を M の座標近傍で $U_1 \cap U_2 \neq \varnothing$ が成り立つものとする．$\pi\colon TM \to M$ を接バンドルとし，$\psi_i\colon \pi^{-1}(U_i) \to U_i \times \mathbb{R}^n$ を (U_i, φ_i) により定まる TM の局所自明化とする．$(U_1 \cap U_2, \psi_1)$ から $(U_1 \cap U_2, \psi_2)$ への変換函数は $D(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})|_{\varphi_1(U_1 \cap U_2)}$ であることを示せ．

問 2.11. 1) $\mathbb{R}^n$ を一般の多様体とみなし，$T\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ が成り立つことを示せ．
ヒント：例えば $\mathrm{id}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を座標近傍と考えると簡単である．一般に，微分同相写像 $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を座標近傍と考えても示せる．
2) $TS^1 \cong S^1 \times \mathbb{R}$ が成り立つことを示せ．
3) M をメビウスの帯とすると，$TM \not\cong M \times \mathbb{R}^2$ が成り立つ．このことを説明せよ．可能であれば証明せよ．

（以上）