２０１７年度ベクトル解析（理I向け，足助担当）演習問題 １１ v1　　2017/6/30（金）

問 11.1. $\mathbb{R}^2$ 上のベクトル場 X を以下のように定めるとき，$r(X)$ を求めよ．また，$r(X)=0$ なるものについてはスカラーポテンシャルを一つ求めよ．

1) $X = x^1\dfrac{\partial}{\partial x^1} + x^2\dfrac{\partial}{\partial x^2}$
2) $X = -x^2\dfrac{\partial}{\partial x^1} + x^1\dfrac{\partial}{\partial x^2}$
3) $X = ((x^1)^2 + x^2)\dfrac{\partial}{\partial x^1} + ((x^2)^3 + x^1)\dfrac{\partial}{\partial x^2}$

※ 進んだ問．$r(X) \neq 0$ の場合に，Poincaré の定理の証明を真似して無理矢理ポテンシャルを構成すると何が起きるか観察せよ．

注 11.2. Poincaré の補題の証明は，星形領域の場合に具体的なポテンシャルの構成法を与えている．例えば 1) に関して言えば，$\omega = x^1dx^1 + x^2dx^2$ とすれば $d\omega = 0$ なので（星形である）$\mathbb{R}^2$ 上でポテンシャルが存在する．証明をなぞってみる．$p_0 = 0$ とし，$\gamma\colon \mathbb{R}^2 \times [0,1] \to \mathbb{R}^2$ を $\gamma(p,t) = tp$ により定める．すると，

$$\begin{aligned}\gamma^*\omega &= \gamma^1 d\gamma^1 + \gamma^2 d\gamma^2\\ &= tx^1(dt\,x^1 + tdx^1) + tx^2(dt\,x^2 + tdx^2)\\ &= (t^2x^1dx^1 + t^2x^2dx^2) + dt \wedge (t(x^1)^2 + t(x^2)^2)\end{aligned}$$

が成り立つ．途中の議論は飛ばして，$\eta = \displaystyle\int_0^1 (t(x^1)^2 + t(x^2)^2)dt = \frac{1}{2}((x^1)^2 + (x^2)^2)$ とすると，

$$d\eta = \frac{1}{2}(2x^1dx^1 + 2x^2dx^2) = x^1dx^1 + x^2dx^2 = \omega$$

が確かに成り立つ．

問 11.3. $\mathbb{R}^3$ 上のベクトル場 X を以下のように定めるとき，$\operatorname{rot} X$, $\operatorname{div} X$ をそれぞれ求めよ．また，$\operatorname{rot} X = 0$ ならばスカラーポテンシャルを，$\operatorname{div} X = 0$ ならばベクトルポテンシャルを一つ求めよ（両方が成り立つこともある）．

1) $X = \dfrac{\partial}{\partial x^1}$
2) $X = x^1\dfrac{\partial}{\partial x^1} + x^2\dfrac{\partial}{\partial x^2} + x^3\dfrac{\partial}{\partial x^3}$
3) $X = e^{x^1+x^2+x^3}\left(\dfrac{\partial}{\partial x^1} + \dfrac{\partial}{\partial x^2} + \dfrac{\partial}{\partial x^3}\right)$

4)

$$X=\exp\left(-\frac{1}{(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2}\right)\left(\frac{x^1}{((x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2}\frac{\partial}{\partial x^1}\right.$$
$$\left.+\frac{x^2}{((x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2}\frac{\partial}{\partial x^2}+\frac{x^3}{((x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2}\frac{\partial}{\partial x^3}\right)$$

問 11.4. I) $X=x^1\dfrac{\partial}{\partial x^1}+x^2\dfrac{\partial}{\partial x^2}$ と置く．$\operatorname{div}X=0$ が成り立つが，Poincaré の補題をそのまま用いると，例えば

$$R=\mathbb{R}^2\setminus\{(x^1,x^2)\in\mathbb{R}^2\mid\exists r\geq 0,\ x^1=r\cos r,r\sin r)\}$$

とした場合にポテンシャルを求めることができない．なお，取り除いた図形 $\{(x^1,x^2)\in\mathbb{R}^2\mid\exists r\geq 0,\ x^1=r\cos r,r\sin r)\}$ は**対数螺旋**と呼ばれる．

1) R は星形でないことを示せ（やや難しい）．
2) $\varphi\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ を $\varphi(r,\theta)=(r\cos\theta,r\sin\theta)$ により定める．$\omega=x^1dx^1+x^2dx^2$ とする．$x=(x^1,x^2)$ に φ を「代入」して得られる 1-形式を $\varphi^*\omega$ とする．即ち，$\varphi=(\varphi^1,\varphi^2)$ として

$$\varphi^*\omega=\varphi^1d\varphi^1+\varphi^2d\varphi^2$$

とする．$\varphi^*\omega$ を r,θ（や $dr,d\theta$）を用いて，x^1,x^2 が現れないように表せ．
3) $D=\{(r,\theta)\in\mathbb{R}^2\mid 0<r<\theta<r+2\pi\}\subset\mathbb{R}^2$ とする．$\varphi(D)=R$ が成り立つことを示せ．また，φ は微分同相写像であることを示せ（後半はやや難しい）．
4) 3) の D は星形であることを示せ．また，$dg=\varphi^*\omega$ が成り立つような $g\in C^\infty(D)$ を一つ求めよ．
5) $f=g\circ\varphi^{-1}$ と置くと，$df=\omega$ が成り立つことを示せ．従って X のポテンシャルが求まった．

II)

$$R'=\mathbb{R}^3\setminus\{(x^1,x^2,x^3)\in\mathbb{R}^3\mid (x^1)^2+(x^2)^2\leq 1,\ x_3\leq 0\}$$

と置く．

1) R' は星形でないことを示せ（やや難しい）．
2)

$$R_1=R'\cap\{(x^1,x^2,x^3)\in\mathbb{R}^3\mid x^1>0\},$$
$$R_2=R'\cap\{(x^1,x^2,x^3)\in\mathbb{R}^3\mid x^1<0\},$$

$$R_3 = R' \cap \{(x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 > 0\},$$
$$R_4 = R' \cap \{(x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 < 0\}$$

と置く．$R_1, \ldots, R_4$ は星形であることを示せ．

ヒント：例えば R_1 については $p_0 = (2, 0, 1)$ としてみよ．

3) $X = x^2 x^3 \dfrac{\partial}{\partial x^1} + x^1 x^3 \dfrac{\partial}{\partial x^2} + x^1 x^2 \dfrac{\partial}{\partial x^3}$ とする．

i) X を $\mathbb{R}^3$ 上のベクトル場とみなしたとき，$\operatorname{rot} X = 0$ が成り立つことを示せ．

ii) X を $\mathbb{R}^3$ 上のベクトル場とみなしたときのスカラーポテンシャルを一つ求めよ．

iii) X を R' 上のベクトル場とみなしたときのスカラーポテンシャルを以下に従って一つ求めよ．

a) ii) を用いて求めよ．

b) ii) は忘れて，$R_1, \ldots, R_4$ 上のポテンシャルを Poincaré の補題の証明を真似して求め，それらの辻褄を合わせて全体（$R' = R_1 \cup \cdots \cup R_4$）のポテンシャルを求めよ．

iv) $\operatorname{div} X = 0$ が $\mathbb{R}^3$ 上で成り立つことを示せ．

v) X を $\mathbb{R}^3$ 上のベクトル場とみなしたときのベクトルポテンシャルを一つ求めよ．

vi) X を R' 上のベクトル場とみなしたときのベクトルポテンシャルを以下に従って一つ求めよ．

a) v) を用いて求めよ．

b) v) は忘れて，$R_1, \ldots, R_4$ 上のポテンシャルを Poincaré の補題の証明を真似して求め，それらの辻褄を合わせて全体（$R' = R_1 \cup \cdots \cup R_4$）のポテンシャルを求めよ．

ここまでの知識を用いると空間を数学的に調べることができる．あまり難しいことはまだできないが，ごく基本的な事について扱う．以下は現時点の知識で解けるが，やや難しい（全体的に星二つ程度である）．なお，第 1 回の演習も参照のこと．

定義 11.5. $\tau\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $\tau(t) = t + 2\pi$ により定める．$\omega \in \Omega^p(\mathbb{R})$ について，$\tau^*\omega$ を以下のように定める．

1) $p=0$ の場合，ω は函数であることに注意して，$\tau^*\omega(s)=\omega(\tau(s))=\omega(s+2\pi)$ とする．

2) $p=1$ の場合，$\omega=fdt$ と表して，$\tau^*\omega(s)=f(\tau(s))d\tau=f(s+2\pi)ds$ と定める．

定義 11.6. $\Omega^p(S^1),\ p=0,1$，を

$$\Omega^p(S^1)=\{\omega\in\Omega^p(\mathbb{R})\mid\tau^*\omega=\omega\}$$

により定める．

注 11.7. 1) 一般の曲面 Σ などについても $\Omega^p(\Sigma)$ が定まる．$\Omega^p(S^1)$ もその定め方に従って定めることができるが，やや面倒になる．勿論定めた結果は定義 11.5 と一致する．

2) 定義 11.5 での $\Omega^p(S^1)$ の定め方は，$S^1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x^2+y^2=1\}$ として極座標を用いることと同じことである．ただし，極座標では θ と $\theta+2\pi$ などが明確には区別できない（しない）が，ここではもっと積極的に別な値だと考えている．

定義 11.8. 1) $S^1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x^2+y^2=1\}$ の点 $(\cos\theta,\sin\theta)$ を $[\theta]$ で表す．$[\theta+2n\pi]=[\theta]$ が $n\in\mathbb{Z}$ について成り立つ．

2) U を $\mathbb{R}^n$ の開集合とし，$f\colon U\to S^1$ とする．また，$r\geq 0$ とする．U の各点 p について，p を含み U に含まれる開集合 $V\subset\mathbb{R}^n$ と，C^r 級の函数 $\theta\colon V\to\mathbb{R}$ が存在して $f|_V(q)=[\theta(q)]$ が V 上で成り立つ時，f は C^r 級であると定める．

問 11.9 ****.** $U\subset\mathbb{R}^n$ を原点に関して星形な開集合とする．すなわち，U は開集合であって，$p\in U, t\in[0,1]$ について $tp\in U$ が成り立つとする．

1) $\widetilde{f}\colon U\to\mathbb{R}$ について，$f\colon U\to S^1$ を $f(p)=[\widetilde{f}(p)]$ により定める．$\widetilde{f}$ が C^r 級，$r\geq 0$，ならば f も C^r 級であることを示せ．

2) $f\colon U\to S^1$ が C^r 級だとする．$Df\colon U\to\mathbb{R}$ を次のように定める．$p\in U$ とする．定義により p を含み，V に含まれる開集合 $V\subset\mathbb{R}^n$ と C^r 級の函数 $\theta\colon V\to\mathbb{R}$ が存在して $f(q)=[\theta(q)]$ が V 上で成り立つ．そこで $Df(q)=D\theta(q)$ と定める．

a) Df は $V,\ \theta$ の選び方に依らず定まることを示せ．また，$Df\colon U\to\mathbb{R}$ は C^{r-1} 級であることを示せ．

b) $\widetilde{f}\colon U\to\mathbb{R}$ を次のように定める．$p\in U$ について，$\gamma\colon[0,1]\to U$ を区分的に C^1 級であって，$\gamma(0)=0,\ \gamma(1)=p$ であるように選ぶ．また，$f(p)=[\theta_0]$ と，

$\theta_0 \in \mathbb{R}$ を用いて表しておく．そして $\widetilde{f}(p) = \theta_0 + \displaystyle\int_0^1 Df(\gamma(t))\frac{d\gamma}{dt}(t)dt$ と定める．$\widetilde{f}$ は θ_0 には依存するが γ には依らないことを示せ．また，$f = [\widetilde{f}]$ が成り立つことを示せ．

※ $r = 0$ でも連続な $\widetilde{f}$ で $f = [\widetilde{f}]$ なるものが構成できる．直感的には簡単であるが，正確に議論するのはやや難しい．

定義 11.10. $\gamma_1, \gamma_2 \colon [0,1] \to S^1$ であって，$\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$, $\gamma_1(1) = \gamma_2(1)$ なるものについて，C^1 級の写像 $H\colon [0,1]\times[0,1] \to S^1$ であって，条件

$$
\begin{aligned}
H(t,0) &= \gamma_1(t),\\
H(t,1) &= \gamma_2(t),\\
H(0,s) &= \gamma_1(0) = \gamma_2(0),\\
H(1,s) &= \gamma_1(1) = \gamma_2(1)
\end{aligned}
$$

が存在するとき，$\gamma_1 \sim \gamma_2$ と表すことにする．

※ H の定義域 $[0,1]\times[0,1]$ は「中身」が詰まっていて，一方，条件は境界にしか言及していないことに注意せよ．

問 11.11 **. $S^1 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\}$ とする．

1) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を C^∞ 級とすると，f は自然に $\Omega^0(S^1)$ の元とみなせることを確かめよ．ヒント：極座標を考えてみよ．
2) $\omega \in \Omega^1(\mathbb{R})$ とすると $d\omega = 0$ が成り立つことを示せ．
3) $\omega \in \Omega^1(S^1)$ とすると $d\omega = 0$ が成り立つことを示せ．
4) $\omega \in \Omega^1(S^1)$ とする．$\gamma\colon [0,1] \to S^1$ を C^1 級とする（実際には区分的に C^1 級で良い）．この時，
$$\omega(\gamma) = \int_\gamma \omega = \int_0^1 \gamma^*\omega$$
と定める（$\omega(\gamma)$ というのはここでの記号である）．$\gamma_1 \sim \gamma_2$ ならば $\omega(\gamma_1) = \omega(\gamma_2)$ が成り立つことを示せ．
※ ヒント：H を定義 11.10 のように定め，$\displaystyle\int_{[0,1]\times[0,1]} H^*\omega$ を計算してみよ．

5) $\omega \in \Omega^1(S^1)$ とし，$f \in \Omega^0(S^1)$ について $\omega = df$ が成り立つとする．$\gamma\colon [0,1] \to S^1$ を C^1 級とし（実際には区分的に C^1 級で良い），$\gamma(0) = \gamma(1)$ とすると，$\omega(\gamma) = 0$ が成り立つことを示せ.

6) $\omega^1(S^1)$ とし，$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $f(t) = \displaystyle\int_0^t \omega$ により定める（$\Omega^1(S^1)$ の元は $\Omega^1(\mathbb{R})$ の元なので，積分が定まる）．$f(2\pi) = 0$ が成り立つことと，$g \in \Omega^0(S^1)$ が存在して $\omega = dg$ が成り立つことは同値であることを示せ.

※ もうひと頑張りすると $H^1_{dR}(S^1) \cong \mathbb{R}$ が成り立つことが示せる.

（以上）