２０１７年度ベクトル解析（理I向け，足助担当）演習問題 6 v1　　2017/5/19（金）
'17/6/8：定義 6.16 の 2) を修正（記号「$\wedge$」が抜けていた）.

問 6.1. $u, v, w, x \in \mathbb{R}^3$ とすると

$$(*)\qquad \langle u \times v \mid w \times x \rangle = \det \begin{pmatrix} \langle u \mid w \rangle & \langle u \mid x \rangle \\ \langle v \mid w \rangle & \langle v \mid x \rangle \end{pmatrix} = \langle u \mid w \rangle \langle v \mid x \rangle - \langle u \mid x \rangle \langle v \mid w \rangle$$

が成り立つことを以下に従って示せ.

1) $A = (u\ v\ w \times x),\ B = (w\ x\ u \times v)$ と置くと，

$$^t\!A\,B = \begin{pmatrix} \langle u \mid w \rangle & \langle u \mid x \rangle & 0 \\ \langle v \mid w \rangle & \langle v \mid x \rangle & 0 \\ 0 & 0 & \langle w \times x \mid u \times v \rangle \end{pmatrix}$$

が成り立つことを示せ．また，

$$\langle u \times v, w \times x \rangle \langle w \times x \mid u \times v \rangle = \det \begin{pmatrix} \langle u \mid w \rangle & \langle u \mid x \rangle \\ \langle v \mid w \rangle & \langle v \mid x \rangle \end{pmatrix} \langle w \times x \mid u \times v \rangle$$

が成り立つことを示せ.

2) $\langle w \times x \mid u \times v \rangle \neq 0$ の場合に $(*)$ が成り立つことを示せ.

3) $\langle w \times x \mid u \times v \rangle = 0$ とする.

a) u, v あるいは w, x が平行である場合に $(*)$ が成り立つことを示せ.
ヒント：例えば $u = \lambda v$ としてみよ.

b) $\{u, v\}$，$\{w, x\}$ のいずれも線型独立である場合．$H = \mathrm{Span}(u, v)$ とする．ここで $\mathrm{Span}(u, v)$ は u, v の生成する $\mathbb{R}^3$ の部分線型空間である.

i) $H = \{z \in \mathbb{R}^3 \mid h(u \times v, z) = 0\}$ が成り立つことを示せ.

ii) $w \times x \in H$ が成り立つことを示せ.

iii) $\alpha^1, \alpha^2 \in \mathbb{R}$ が存在して $w \times x = \alpha^1 u + \alpha^2 v$ が成り立つことを示せ．また，$(\alpha^1, \alpha^2) \neq (0, 0)$ が成り立つことを示せ.

iv)

$$0 = \langle w \mid w \times x \rangle = \alpha^1 \langle w \mid u \rangle + \alpha^2 \langle w \mid v \rangle,$$
$$0 = \langle x \mid w \times x \rangle = \alpha^1 \langle x \mid u \rangle + \alpha^2 \langle x \mid v \rangle$$

が成り立つことを示せ.

v) $\det \begin{pmatrix} \langle u \mid w \rangle & \langle u \mid x \rangle \\ \langle v \mid w \rangle & \langle v \mid x \rangle \end{pmatrix} = 0$ が成り立ち，$(*)$ が成り立つことを示せ.

問 6.2. $v, w, u \in \mathbb{R}^3$ とする．

1) $v \times (w \times u) = \langle v \mid u \rangle w - \langle v \mid w \rangle u$ が成り立つことを示せ．$v \times (w \times u)$ を**ベクトル三重積**と呼ぶことがある．
   ヒント：$v \times (w \times u)$ は任意の $z \in \mathbb{R}^3$ について $\langle v \times (w \times u) \mid z \rangle = \det(v\ w \times u\ z)$ が成り立つ唯一の $\mathbb{R}^3$ の元である．$\det(v\ w \times u\ z)$ を，$\langle x \mid z \rangle$, $x \in \mathbb{R}^3$ の形に表してみよ．
2) $v \times (w \times u) + w \times (u \times v) + u \times (v \times w) = 0$ が成り立つことを示せ．これを **Jacobi 恒等式**と呼ぶ．
   ヒント：1) を用いれば容易である．

$\mathbb{R}^3$ 上の微分形式とベクトル場について（１）

講義でも一部扱うが，まとめて扱うのは時間的に難しいと思われるのでここで簡単にまとめておく．

以下では $\{e_1, \ldots, e_n\}$ を $\mathbb{R}^n$ の標準的な基底とする．$T_p^*\mathbb{R}^n = \{f \colon T_p\mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \mid f \text{ は線型}\}$ と置いて $T_p\mathbb{R}^n$ の双対空間と呼ぶのであった．$T_p^*\mathbb{R}^n$ は線型写像の和，定数倍に関して線型空間である．

定義 6.3. $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}^n$ について記号 $a_1 \wedge \cdots \wedge a_k$ を以下のように定め，$a_1, \ldots, a_k$ の**外積**，**ウェッジ積**と呼ぶ．

1) $a_1 \wedge \cdots \wedge a_k$, $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}^n$ が $\mathbb{R}$ 上生成する実線型空間を $\bigwedge^k \mathbb{R}^n$ で表す．$\bigwedge^0 \mathbb{R}^n = \mathbb{R}$ と置く．
2) $\wedge$ は演算とみなしたとき多重線型である．即ち，$f \colon (\mathbb{R}^n)^k \to \bigwedge^k \mathbb{R}^n$ を $f(a_1, \ldots, a_k) = a_1 \wedge \cdots \wedge a_k$ により定めると，f は各 a_i, $1 \leq i \leq k$ について線型写像である．
3) $\wedge$ は交代的である．即ち，ある $i \neq j$ について $a_i = a_j$ が成り立つのであれば $a_1 \wedge \cdots \wedge a_k = 0$ が成り立つ．

問 6.4. 上の定義で $k = 2$ とすると講義で扱った場合であることを確かめよ．

問 6.5. $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}^n$ とする．$i \neq j$ とすると，

$$a_1 \wedge \cdots \wedge \overset{i}{\overset{\smile}{a_j}} \wedge \cdots \wedge \overset{j}{\overset{\smile}{a_i}} \wedge \cdots \wedge a_k = -a_1 \wedge \cdots \wedge a_k$$

が成り立つことを示せ．

ヒント：行列式は同じ列を含めば 0 に等しいし，列を入れ替えると符号が変わる．これらは同値な命題であるが，このことの証明を真似してみよ．

問 6.6. $k > n$ とすると $\bigwedge^k \mathbb{R}^n = \{o\}$ が成り立つことを示せ．特に $\dim \bigwedge^k \mathbb{R}^n = 0$ が成り立つ．

問 6.7. $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^n$ とする．$A = (a_1 \ \cdots \ a_n)$ とすると，$a_1 \wedge \cdots \wedge a_n = (\det A) e_1 \wedge \cdots \wedge e_n$ が成り立つことを示せ．
ヒント：「行列式の特徴付け」に関して線型代数の教科書を調べてみよ．

少し例を計算してみると，$a_1, \ldots, a_k$ は $e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}$，$i_1 < \cdots i_k$ の線型結合として表すことができることが分かる．実際には次が成り立つ．

定理 6.8. $n > 0$ ならば $\{e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}\}_{i_1 < \cdots < i_k}$ は $\bigwedge^k \mathbb{R}^n$ の基底である．

$n = 0$ の時は $\{1\}$ が $\{e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}\}$ に相当する $\bigwedge^0 \mathbb{R}^n (= \mathbb{R})$ の基底であると考える．

問 6.9.
1) $\dim \bigwedge^k \mathbb{R}^n = \binom{n}{k} = {}_n\mathrm{C}_k$ が成り立つことを示せ．特に，$\dim \bigwedge^0 \mathbb{R}^n = \dim \bigwedge \mathbb{R}^n = 1$ が成り立つことを示せ．
2) $\dim \bigwedge^1 \mathbb{R}^2 = 2$ が成り立つことを示せ．また，$\dim \bigwedge^1 \mathbb{R}^3 = \dim \bigwedge^2 \mathbb{R}^3 = 3$ が成り立つことを示せ．

定義 6.10. $\alpha \in \bigwedge^k \mathbb{R}^n$，$\beta \in \bigwedge^l \mathbb{R}^n$ とする．$\alpha = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} \alpha^{i_1, \ldots, i_k} e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}$，$\beta = \sum_{j_1 < \cdots < j_l} \beta^{j_1, \ldots, j_l} e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_l}$ と表して，

$$\alpha \wedge \beta = \frac{1}{k!l!} \sum_{\substack{i_1 < \cdots < i_k \\ j_1 < \cdots < j_l}} \alpha^{i_1, \ldots, i_k} \beta^{j_1, \ldots, j_l} e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k} \wedge e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_l}$$

と定め，α と β の**外積**あるいは**ウェッジ積**と呼ぶ．

注 6.11. $\frac{1}{k!l!}$ の代わりに $\frac{1}{(k+l)!}$ とすることも多い．どちらも絶対多数は取れない状況なので，文脈から判断するしかない．なお，種々の公式（この講義では扱わない）はほとんどの場合同じ形である（係数が変わったりはしない）．

定義 6.12.

$$\bigwedge^k T\mathbb{R}^n = \bigcup_{p\in\mathbb{R}^n} \bigwedge^k T_p\mathbb{R}^n,$$
$$\bigwedge^k T^*\mathbb{R}^n = \bigcup_{p\in\mathbb{R}^n} \bigwedge^k T_p^*\mathbb{R}^n$$

と置く．ここで，$p \neq q$ ならば $\bigwedge^k T_p\mathbb{R}^n \cap \bigwedge^k T_q\mathbb{R}^n = \varnothing$，$\bigwedge^k T_p^*\mathbb{R}^n \cap \bigwedge^k T_q^*\mathbb{R}^n = \varnothing$ と考える[†1]．

定義 6.13. $\omega\colon \mathbb{R}^n \to \bigwedge^k T^*\mathbb{R}^n$ が $\mathbb{R}^n$ 上の C^r 級の k-形式であるとは，$i_1 < \cdots < i_k$ について C^r 級の函数 $f_{i_1,\dots,i_k}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ が存在して

$$\omega_p = \omega(p) = \sum_{i_1<\cdots<i_k} f_{i_1,\dots,i_k} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$$

が成り立つことを言う．ただし，$k=0$ の時には $dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} = 1$ とする．$U \subset \mathbb{R}\ n$ が開集合であるとき，U 上の C^r 級の微分形式を同様に定める．

問 6.14. 1) ω が $\mathbb{R}^3$ 上の C^r 級の 0-形式であることと，$\omega\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ が C^r 級の函数であることと同値であることを示せ．

2) ω が $\mathbb{R}^3$ 上の C^r 級の 1-形式であることと，$\mathbb{R}^3$ 上の C^r 級の函数 f_1, f_2, f_3 が存在して，$\omega = f_1dx^1 + f_2dx^2 + f_3dx^3$ が成り立つことは同値であることを示せ．

3) ω が $\mathbb{R}^3$ 上の C^r 級の 2-形式であることと，$\mathbb{R}^3$ 上の C^r 級の函数 f_{23}, f_{31}, f_{12} が存在して，$\omega = f_{23}dx^2 \wedge dx^3 + f_{31}dx^3 \wedge dx^1 + f_{12}dx^1 \wedge dx^2$ が成り立つことは同値であることを示せ．
ヒント：素直に考えると $dx^3 \wedge dx^1$ ではなく $dx^1 \wedge dx^3$ が現れるが，これは大した問題ではない．

4) ω が $\mathbb{R}^3$ 上の C^r 級の 3-形式であることと，$\mathbb{R}^3$ 上の C^r 級の函数 f_{123} が存在して，$\omega = f_{123}dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$ が成り立つことは同値であることを示せ．

5) $k > 3$ とすると，$\mathbb{R}^3$ 上の k-形式は 0 のみであることを示せ．

6) $\mathbb{R}^2$ 上の k-形式について，上と同様のことが成り立つことを示せ．

定義 6.15.

$$C^\infty(\mathbb{R}^n) = \{\mathbb{R}^n \text{ 上の } C^\infty \text{ 級の函数全体}\},$$

[†1] $T\mathbb{R}^n = \bigcup_{p\in\mathbb{R}^n} T_p\mathbb{R}^n$ や $T^*\mathbb{R}^n = \bigcup_{p\in\mathbb{R}^n} T_p^*\mathbb{R}^n$ と同様である．

$$\mathfrak{X}(\mathbb{R}^n) = \{\mathbb{R}^n \text{ 上の } C^\infty \text{ 級のベクトル場全体 }\},$$
$$\Omega^k(\mathbb{R}^n) = \{\mathbb{R}^n \text{ 上の } C^\infty \text{ 級の } k\text{-形式全体 }\}$$

と置く．一般に $U \subset \mathbb{R}^n$ を開集合とするとき，$C^\infty(U)$ などを同様に定める．

定義 6.16. $d\colon \Omega^k(\mathbb{R}^n) \to \Omega^{k+1}(\mathbb{R}^n)$ を次のように定め，**外微分**あるいは**外微分作用素**と呼ぶ．

1) $k = 0$ の場合には
$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$$
とする．

2) $k > 0$ とする．$\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$ を
$$\omega = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} f_{i_1,\ldots,i_k} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$$
と表して
$$d\omega = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} df_{i_1,\ldots,i_k} \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$$
と置く．

$d\omega$ を ω の**外微分**と呼ぶ．

問 6.17. $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$ とすると $d(d(\omega)) = 0$ が成り立つことを示せ．このことをしばしば $d \circ d = 0$ あるいは $d^2 = 0$ と表す．

定義 6.18. $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$ が $d\omega = 0$ を満たすとき，ω を**閉形式**と呼ぶ．また，$\eta \in \Omega^{k-1}(\mathbb{R}^n)$ が存在して $\omega = d\eta$ が成り立つ時，ω を**完全形式**と呼ぶ．

問 6.19. $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$ が完全形式ならば閉形式であることを示せ．

1-形式 ω が完全形式であることと，全微分方程式が完全形であることには深い関係がある．時間に余裕があれば後日扱うが，基本的には常微分方程式に譲る．

問 6.20. 1) $\omega \in \Omega^1(\mathbb{R}^2)$ とする．$\omega = f_1 dx^1 + f_2 dx^2$ ならば
$$d\omega = \left(\frac{\partial f_2}{\partial x^1} - \frac{\partial f_1}{\partial x^2}\right) dx^1 \wedge dx^2$$
が成り立つことを示せ．

2) $\omega \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$ とする．$\omega = f_{23}dx^2 \wedge dx^3 + f_{31}dx^3 \wedge dx^1 + f_{12}dx^1 \wedge dx^2$ ならば

$$d\omega = \left(\frac{\partial f_{23}}{\partial x^1} + \frac{\partial f_{31}}{\partial x^2} + \frac{\partial f_{12}}{\partial x^3}\right) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$$

が成り立つことを示せ．

次が知られている．

定理 6.21 (Poincaré の補題)**.** $p \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$ とし（$r = +\infty$ の場合も許す），$U = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - p\| < r\} \subset \mathbb{R}^n$ とする．$k > 0$ とする．$\omega \in \Omega^k(U)$ が $d\omega = 0$ を満たすならば $\eta \in \Omega^{k-1}(U)$ が存在して $\omega = d\eta$ が成り立つ．

物理的には Poincaré の補題は U 上でのポテンシャルの存在を意味する．$k = 0$ の場合には Poincaré の補題は成り立たない．例えば $r = +\infty$ とし，$\mathbb{R}^n$ 上の定数函数 $f(x) = 1$ を考える．$df = 0$ であるが，そもそも (-1)-形式が考えられないので $d\eta = f$ とは行かない．

以下では $n = 2$ または $n = 3$ とする．

定義 6.22. $X = f^1\dfrac{\partial}{\partial x^1} + f^2\dfrac{\partial}{\partial x^2} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$ について

$$r(X) = \frac{\partial f^2}{\partial x^1} - \frac{\partial f^1}{\partial x^2}$$

と定める[†2]．

定義 6.23. 1) $\mu_1 \colon \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2) \to \Omega^1(\mathbb{R}^2)$ を以下のように定める．$X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$ とし，$X = f^1\dfrac{\partial}{\partial x^1} + f^2\dfrac{\partial}{\partial x^2}$ と表す．そして

$$\mu_1(X) = f^1dx^1 + f^2dx^2$$

と定める[†3]（μ_1 は特に定まった記号ではない．以下同様）．

2) $\mu_0 \colon C^\infty(\mathbb{R}^2) \to \Omega^0(\mathbb{R}^2) = C^\infty(\mathbb{R}^2)$ を恒等写像とする．

3) $\mu_2 \colon C^\infty(\mathbb{R}^2) \to \Omega^2(\mathbb{R}^2)$ を，$f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ について

$$\mu_2(f) = f dx^1 \wedge dx^2$$

により定める．

[†2] 後で定める**回転** rot の類似であるが，特に記号が無いようなのでここでは r としておく．

[†3] 添字の位置が異様であることに注意せよ．ここは本当は内積（より一般にリーマン計量）により f の添字を下げている．標準的な内積から定まるとは限らない，一般のリーマン計量を用いる場合には μ_1 の定義はそれに応じて変わる．これは μ_2 についても同様である．一方，μ_0 はリーマン計量を用いていないので，これは変わらない．

問 6.24. 1) $r\circ \mathrm{grad}=0$ が成り立つ，即ち，$f\in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ について $r(\mathrm{grad}\, f)=0$ が成り立つことを示せ．

2) $f\in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ とする．$\mu_1(\mathrm{grad}\, f)=df=d(\mu_0(f))$ が成り立つことを示せ[†4]．

3) $X\in\mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$ とする．$\mu_2(r(X))=d(\mu_1(X))$ が成り立つことを示せ．

模式的には次が成り立つ．

$$
\begin{array}{ccccccccc}
\mathbb{R} & \longrightarrow & C^\infty(\mathbb{R}^2) & \xrightarrow{\mathrm{grad}} & \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2) & \xrightarrow{r} & C^\infty(\mathbb{R}^2) & \longrightarrow & 0 \\
\Big\| & & {\scriptstyle\mu_0}\Big\downarrow & & {\scriptstyle\mu_1}\Big\downarrow & & {\scriptstyle\mu_2}\Big\downarrow & & \Big\| \\
\mathbb{R} & \longrightarrow & \Omega^0(\mathbb{R}^2) & \xrightarrow[d]{} & \Omega^1(\mathbb{R}^2) & \xrightarrow[d]{} & \Omega^2(\mathbb{R}^2) & \xrightarrow[d]{} & 0
\end{array}
$$

即ち，上の図（**図式**（diagram）と呼ぶ）において，矢印をどの順番に辿っても同じ結果が得られる．このような状態を図式が**可換**であると言う．上の図式においては縦に書かれている写像は全て全単射であって，逆に辿ることができる．一方，横に書かれている写像はそうではない．

$X\in\mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$ とする．Poincaré の補題により $d(\mu_1(X))=0$ ならば $f\in\Omega^0(\mathbb{R}^2)$ が存在して，$df=\mu_1(X)$ が成り立つ．従って，左辺を μ_0^{-1} で，右辺を μ_1^{-1} で写して $\mathrm{grad}\, f=X$ を得る．条件 $d(\mu_1(X))=0$ は $r(X)=0$ と書き直される．より一般的に次が成り立つ．

定理 6.25. $p\in\mathbb{R}^2$, $r>0$ とし，$U=\{x\in\mathbb{R}^2 \mid \|x-p\|<r\}$ とする．$X\in\mathfrak{X}(U)$ が $r(X)=0$ を満たすならば $f\in C^\infty(U)$ が存在して $X=\mathrm{grad}\, f$ が成り立つ．

物理的にはこれは X の**スカラーポテンシャル**が存在することを意味する．U はもう少し一般的な形で良いが,「穴」が空いていてはいけない．

定義 6.26. $X=f^1\dfrac{\partial}{\partial x^1}+f^2\dfrac{\partial}{\partial x^2}+f^3\dfrac{\partial}{\partial x^3}\in\mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$ について

$$\mathrm{rot}(X)=\left(\frac{\partial f^3}{\partial x^2}-\frac{\partial f^2}{\partial x^3}\right)\frac{\partial}{\partial x^1}+\left(\frac{\partial f^1}{\partial x^3}-\frac{\partial f^3}{\partial x^1}\right)\frac{\partial}{\partial x^2}+\left(\frac{\partial f^2}{\partial x^1}-\frac{\partial f^1}{\partial x^2}\right)\frac{\partial}{\partial x^3}$$

と定め，f の**回転**と呼ぶ．$\mathrm{rot}\, X$ は $\mathrm{curl}\, X$ で表すこともある．また，

$$\mathrm{div}(X)=\frac{\partial f^1}{\partial x^1}+\frac{\partial f^2}{\partial x^2}+\frac{\partial f^3}{\partial x^3}$$

と定め，f の**発散**と呼ぶ．

[†4] n が一般であっても μ_1 は同様に定義できて，同様のことが成り立つ．

定義 6.27. 1) $\mu_1\colon \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3) \to \Omega^1(\mathbb{R}^3)$ を以下のように定める．$X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$ とし，$X = f^1 \dfrac{\partial}{\partial x^1} + f^2 \dfrac{\partial}{\partial x^2} + f^3 \dfrac{\partial}{\partial x^3}$ と表す．そして

$$\mu_1(X) = f^1 dx^1 + f^2 dx^2 + f^3 dx^3$$

と定める．

2) $\mu_2\colon \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3) \to \Omega^2(\mathbb{R}^3)$ を以下のように定める．$X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$ とし，$X = f^1 \dfrac{\partial}{\partial x^1} + f^2 \dfrac{\partial}{\partial x^2} + f^3 \dfrac{\partial}{\partial x^3}$ と表す．そして

$$\mu_1(X) = f^1 dx^2 \wedge dx^3 + f^2 dx^3 \wedge dx^1 + f^3 dx^1 \wedge dx^2$$

と定める．

3) $\mu_0\colon C^\infty(\mathbb{R}^3) \to \Omega^0(\mathbb{R}^3) = C^\infty(\mathbb{R}^3)$ を恒等写像とする．

4) $\mu_3\colon C^\infty(\mathbb{R}^3) \to \Omega^3(\mathbb{R}^3)$ を，$f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ について

$$\mu_3(f) = f dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$$

により定める．

問 6.28. 1) $\mathrm{rot} \circ \mathrm{grad} = 0$ が成り立つことを示せ．

2) $\mathrm{div} \circ \mathrm{rot} = 0$ が成り立つことを示せ．

3) $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ とする．$\mu_1(\mathrm{grad}\, f) = df = d(\mu_0(f))$ が成り立つことを示せ．

4) $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$ とする．$\mu_2(\mathrm{rot}(X)) = d(\mu_1(X))$ が成り立つことを示せ．また，$\mu_3(\mathrm{div}(X)) = d(\mu_2(X))$ が成り立つことを示せ．

次の図式は可換である．

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R} \arrow[r] \arrow[d, equal] & C^\infty(\mathbb{R}^3) \arrow[r, "\mathrm{grad}"] \arrow[d, "\mu_0"'] & \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3) \arrow[r, "\mathrm{rot}"] \arrow[d, "\mu_1"'] & \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3) \arrow[r, "\mathrm{div}"] \arrow[d, "\mu_2"'] & C^\infty(\mathbb{R}^3) \arrow[r] \arrow[d, "\mu_3"'] & 0 \arrow[d, equal] \\
\mathbb{R} \arrow[r] & \Omega^0(\mathbb{R}^3) \arrow[r, "d"'] & \Omega^1(\mathbb{R}^3) \arrow[r, "d"'] & \Omega^2(\mathbb{R}^3) \arrow[r, "d"'] & \Omega^3(\mathbb{R}^3) \arrow[r, "d"'] & 0
\end{tikzcd}$$

$X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$ とする．Poincaré の補題から次が従う．

定理 6.29. $p \in \mathbb{R}^3,\ r > 0$ とし，$U = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x - p\| < r\}$ とする．$X \in \mathfrak{X}(U)$ について次が成り立つ．

1) $\mathrm{rot}(X) = 0$ が成り立つならば $f \in C^\infty(U)$ が存在して $X = \mathrm{grad}\, f$ が成り立つ．このような f を X のスカラーポテンシャルと呼ぶ．

2) $\mathrm{div}(X) = 0$ が成り立つならば $Y \in \mathfrak{X}(U)$ が存在して $X = \mathrm{rot}\, Y$ が成り立つ．このような Y を X のベクトルポテンシャルと呼ぶ．

問 6.30. 1) $\omega = x^1 dx^1 + x^2 dx^2 \in \Omega^1(\mathbb{R}^2)$ とする（係数の添字がおかしく見えるが，$f_1(x) = x^1,\ f_2(x) = x^2$ として $f_1 dx\ 1 + f_2 dx^2$ を考えているので問題ない）．$d\omega = 0$ が成り立つことを示せ．また，$f \in \Omega^0(\mathbb{R}^2)$ で $df = \omega$ が成り立つものを一つ求めよ．

2) $\omega = \dfrac{-x^2 dx^1 + x^1 dx^2}{(x^1)^2 + (x^2)^2} \in \Omega^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ と置く．$d\omega = 0$ が成り立つことを示せ．

（以上）