２０１７年度ベクトル解析（理I向け，足助担当）演習問題 2 v2　　　2017/4/14（金）
'17/4/14：問 2.9，2.10 について，記号の説明を追加．

問 2.1. $\varphi\colon I \to J$ を g から f への C^r 級のパラメータの変換とする．

1) φ は全単射であることを示せ．
2) ψ は f から g への C^r 級のパラメータの変換であることを示せ．
3*) I が開区間ならば J も開区間であることを示せ．同様に I が閉区間（半開区間）ならば J も閉区間（半開区間）であることを示せ．
4) $r \geq 1$ とする．このとき，$\forall t \in I,\ D\varphi(t) \neq 0$ が成り立つことを示せ．特に，$\forall t,\ D\varphi(t) > 0$ あるいは $\forall t,\ D\varphi(t) < 0$ の一方のみが必ず成り立つ．

問 2.2. C を $\mathbb{R}^n$ の C^1 級の曲線とし，f, g を C の C^1 級のパラメータ付けとする．また，g から f へのパラメータの変換が存在するとする．このとき，f と g は同じ向きを定めるか，あるいは逆の向きを定めることを示せ．
ヒント：問 2.1 の 4) を用いると良い．

問 2.3 ****.** $U = V = \mathbb{R}^2$ とし，$\varphi\colon U \to V$ を $f(x^1, x^2) = ((x^1)^2 - (x^2)^2, 2x^1x^2)$ により定める．

1) $z = x^1 + \sqrt{-1}x^2$ とし，$g(z) = f(x^1, x^2)$ とする．z の二乗を $(z)^2$ で表すことにし，$(z)^2 = w^1 + \sqrt{-1}w^2$ と，実数 w^1, w^2 を用いて表すと $g(z) = (z)^2$ が成り立つことを確かめよ[†1]．また，φ は全射であることを示せ．
2) $U = \mathbb{R}^2$ 上のベクトル場 X を $x = (x^1, x^2) \in \mathbb{R}^2$ について
$$X(x) = -x^2 \frac{\partial}{\partial x^1}_x + x^1 \frac{\partial}{\partial x^2}_x$$
と置くことにより定める．
 a) X は C^∞ 級であることを確かめよ．
 b) $\varphi_{*x}X(x) = \varphi_{*-x}X(-x)$ が成り立つことを示せ．
 c) $y \in V = \mathbb{R}^2$ について $x \in U = \mathbb{R}^2$ を $\varphi(x) = y$ が成り立つように選び，
$$Y(y) = \varphi_{*x}X(x)$$

[†1] 添字を上にも付けることにすると便利なことも多いが，このように指数と混じると z^2 がなにを表すのかよくわからないといったような問題が生じる．目的により適切に使い分けることが大事であるが，少なくとも一連の文章（例えば一つの本，論文など）の中では変えないのが原則である．

と置く．このとき，(x の選び方は一般には一意的ではないが，それにも拘わらず）$Y(y)$ は一意的に定まる[†2]ことを示せ．また，Y は C^∞ 級であることを示せ．ヒント：最後は Y を式で具体的に書き下してしまうのが現時点では一番易しいと思われる．逆函数定理を用いることもできる．

3) $U = \mathbb{R}^2$ 上のベクトル場 Z を $x = (x^1, x^2) \in \mathbb{R}^2$ について

$$Z(x) = \frac{\partial}{\partial x^1}$$

と置くことにより定める．このとき，$p = (1, 0)$, $p' = (-1, 0) \in U$ とすると $\varphi(p) = \varphi(p') = (1, 0) \in V$ であるが，$\varphi_{*p} Z(p) \neq \varphi_{*p'} Z(-p)$ が成り立つことを示せ．従って，少なくとも 2c) の方法で $\varphi_* Z$ を定めることはできない．

問 2.4. 以下に定める $\mathbb{R}^2$ 上のベクトル場を図示せよ．

1) $X = x\dfrac{\partial}{\partial x} + y\dfrac{\partial}{\partial y}$.
2) $X = x\dfrac{\partial}{\partial x} - y\dfrac{\partial}{\partial y}$.
3) $X = -y\dfrac{\partial}{\partial x} + x\dfrac{\partial}{\partial y}$.
4) $X = xy + y^2\dfrac{\partial}{\partial y}$.

定義 2.5. $X = \displaystyle\sum_{i=1}^n f^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ を $\mathbb{R}^n$ の開集合 U で定まった C^r 級のベクトル場とする．I を区間とするとき，C^{r+1} 級の曲線 $\gamma\colon I \to U$ が I 上で定まった X の**積分曲線**であるとは，

$$D\gamma = (f^1 \circ \gamma \ \cdots \ f^n \circ \gamma)$$

が成り立つことを言う．即ち，$\gamma = (\gamma^1 \ \cdots \ \gamma^n)$ と座標を用いて表したとき，各 i について $\dfrac{d\gamma}{dt} = f^i \circ \gamma$ が成り立つことを言う．ここで t は I の座標（変数）である．

次が成り立つ（恐らく直接は扱わないと思うが,「常微分方程式」で扱う「常微分方程式の解の存在と一意性」や「初期値に関する依存性」を用いればすぐに示せる）．

定理 2.6. X を $\mathbb{R}^n$ の開集合 U 上で定まった C^r 級，$r \geq 1$，のベクトル場とする．この時，$p \in U$ とすると，$p \in V \subset U$ なる開集合 V と，0 を含む開区間 I，$\gamma\colon I \times V \to U$ が存在して次が成り立つ．即ち，

[†2] このようなことを Y は well-defined であると（日本語の文章であっても）言う．

1) γ は $(n+1)$ 変数函数として C^{r+1} 級である．

2) $q \in V$ について $\gamma(\,\cdot\,, q)$ は X の積分曲線である．

3) γ は I, V を固定すれば一意的である．

注 2.7. $r = 0$ とすると定理 2.6 は一般には成り立たない．一方，例えば $X = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} f^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ としたとき，f^i がいずれも Lipschitz 連続ならば定理は成り立つ．定理が成り立つ必要十分条件は知られているが，これはやや難しい．

問 2.8. 問 2.4 に挙げたベクトル場について，積分曲線を求めよ．

問 2.9 ***.** $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を $\varphi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ により定める（φ を例えば $\mathbb{R}_{\geq 0} \times [0, 2\pi]$ に制限すれば $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ の極座標である）．また，値域の $\mathbb{R}^2$ の座標を (x,y) とする．

1) $a = (r,\theta),\ p = \varphi(a)$ とすると

$$\begin{aligned} \varphi_{*a} \frac{\partial}{\partial r}\Big|_a &= \cos\theta \frac{\partial}{\partial x}\Big|_p + \sin\theta \frac{\partial}{\partial y}\Big|_p, \\ \varphi_{*a} \frac{\partial}{\partial \theta}\Big|_a &= -r\sin\theta \frac{\partial}{\partial x}\Big|_p + r\cos\theta \frac{\partial}{\partial y}\Big|_p \end{aligned}$$

が成り立つことを示せ．また，$r \neq 0$ とすると

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}\Big|_p &= \cos\theta \frac{\partial}{\partial r}\Big|_a - \frac{1}{r}\sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta}\Big|_a, \\ \frac{\partial}{\partial y}\Big|_p &= \sin\theta \frac{\partial}{\partial r}\Big|_a + \frac{1}{r}\cos\theta \frac{\partial}{\partial \theta}\Big|_a \end{aligned}$$

が成り立つことを示せ．ただし，$\varphi_{*a} \dfrac{\partial}{\partial r}\Big|_a,\ \varphi_{*a} \dfrac{\partial}{\partial \theta}\Big|_a$ をそれぞれ $\dfrac{\partial}{\partial r}\Big|_a,\ \dfrac{\partial}{\partial \theta}\Big|_a$ と略記した．

2) 行列の積と同様に計算することにすると

$$\begin{pmatrix} \varphi_{*a} \dfrac{\partial}{\partial r}\Big|_a & \varphi_{*a} \dfrac{\partial}{\partial \theta}\Big|_a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x}\Big|_p & \dfrac{\partial}{\partial y}\Big|_p \end{pmatrix} D\varphi(a)$$

が成り立つことを示せ．

3) $U \subset \mathbb{R}^2$ を開集合とし，$f\colon U \to \mathbb{R}$ は C^2 級とする．このとき，Δf を

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

により定め，Δ をラプラス作用素（Laplacian, Laplace operator）と呼ぶ．$g = f \circ \varphi$ とすると，$r \neq 0$ ならば

$$\Delta g = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}$$

が成り立つことを示せ（しばしば上の式を

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}$$

と表してしまうが，厳密に言えば正しくないので注意を要する）．

問 2.10 ***.** $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を

$$\varphi(r,\theta,\rho) = (r\sin\theta\cos\rho, r\sin\theta\sin\rho, r\cos\theta)$$

により定める．また，値域の $\mathbb{R}^3$ の座標を (x,y,z) とする．

1) r を固定すると，$\varphi(r,\theta,\rho) \in \{(x^1,x^2,x^3) \in \mathbb{R}^3 \mid (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = r^2\}$ が成り立つことを示せ．
2) $\det D\varphi(r,\theta,\rho) = r^2\sin\theta$ が成り立つことを示せ．
3) $a \in \mathbb{R}^3$, $p = \varphi(a)$ とする．行列と同様に計算することにすると

$$\left(\varphi_{*a}\frac{\partial}{\partial r}_a \ \varphi_{*a}\frac{\partial}{\partial \theta}_a \ \varphi_{*a}\frac{\partial}{\partial \rho}_a \right) = \left(\frac{\partial}{\partial x}_p \ \frac{\partial}{\partial y}_p \ \frac{\partial}{\partial z}_p \right) D\varphi(a)$$

が成り立つことを示せ．
4) $U \subset \mathbb{R}^3$ を開集合とし，$f\colon U \to \mathbb{R}$ は C^2 級とする．このとき，ラプラス作用素 Δ を

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

により定める．$r, \sin\theta$ はいずれも 0 でないとする．このとき，$g = f\circ\varphi$ として Δg を r,θ,ρ（やこれらに関する偏微分）を用いて表せ（x,y,z は現れないようにすること）．

※ かなり面倒くさい．

（以上）