２０１７年度ベクトル解析（理I向け，足助担当）演習問題 1 v1　　2017/4/7（金）

問 1.1 *. 1) 区間が弧状連結であることの定義をみたすことを確かめよ．

2) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ は弧状連結でないことを示せ．

3) $a, b \in \mathbb{R}$ とする．$[a,b]_{\mathbb{Q}} = [a,b] \cap \mathbb{Q}$ とすると $[a,b]_{\mathbb{Q}}$ は弧状連結でないことを示せ．

定義 1.2. $S^1 = \{{}^t(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ と置く．また，$\varphi\colon \mathbb{R} \to S^1$ を

$$\varphi(\theta) = {}^t(\cos 2\pi\theta, \sin 2\pi\theta)$$

により定める．$g\colon S^1 \to \mathbb{R}^n$ が C^r 級であるとは，$g \circ \varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ が C^r 級であることと定める．

注 1.3. S^1 に限らず，例えば球面のような図形上の函数についても C^r 級という概念を定めることができる．定義 1.2 はその特別な場合である．

問 1.4. $I = [a,b],\ a < b$ とする．$f\colon I \to \mathbb{R}^n$ が C^r 級の閉曲線であるとき，$\psi\colon I \to [0,1]$ を $\psi(t) = \dfrac{t-a}{b-a}$ により定め，$f'(t) = f(\psi(t))$ とすると f' は $[0,1]$ 上で定まった $\mathbb{R}^n$ 内の閉曲線であることを示せ．

問 1.5. S^1, φ を定義 1.2 のように定める．また，$I = [0,1]$ とする．

1) $f\colon I \to \mathbb{R}^n$ を C^r 級の閉曲線とする．このとき，$t \in \mathbb{R}$ について $[t]$ を $s \in [0,1)$ であって，ある $n \in \mathbb{Z}$ について $t = s + n$ が成り立つ物として定める（このような $[t]$ は一意的に定まる．このことも確かめよ）．そして $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ を

$$F(t) = f([t])$$

により定めると，

a) F は C^r 級である．

b) $t \in \mathbb{R}$ について $F(t+1) = F(t)$ が成り立つ．より一般に $t \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{Z}$ について $F(t+n) = F(t)$ が成り立つ．

が成り立つことを示せ．

2) $f\colon I \to \mathbb{R}^n$ を C^r 級の閉曲線とし，$F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ を 1) のように定める．そして $f'\colon S^1 \to \mathbb{R}^n$ を次のように定める．$p = {}^t(x,y) \in S^1$ とする．このとき，$\theta \in \mathbb{R}$ を $\varphi(\theta) = p$ であるように任意に選び

$$f'(p) = F(\theta)$$

と置く．

a) θ の選び方には $\mathbb{Z}$ の分の任意性があることを確かめよ．即ち，一旦 θ を選ぶと，$n \in \mathbb{Z}$ について $\theta + n$ も別の θ として選べることを確かめよ．

b) f' は θ の選び方に依らないことを示せ[†1]．

c) $F' \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ を $F'(\theta) = f'(\varphi(\theta))$ により定めると $F' = F$ が成り立つことを示せ．

3) $g \colon S^1 \to \mathbb{R}^n$ を C^r 級の写像（定義 1.2）とする．$F \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ を $F(\theta) = g(\varphi(\theta))$ により定め，$f \colon I = [0,1] \to \mathbb{R}^n$ を $f(t) = F(t)$ により定める（f を F の I への制限とする）．このとき，f は C^r 級の閉曲線）であることを示せ．

4) $g \colon S^1 \to \mathbb{R}^n$ が C^r 級の写像であるとき，3) により定まる f を $\Phi(g)$ とする．
　また，$f \colon I \to \mathbb{R}^n$ が C^r 級の閉曲線であるとき，2 により定まる f' を $\Psi(f)$ とする．このとき，$\Psi(\Phi(g)) = g$，$\Phi(\Psi(f)) = f$ が成り立つことを示せ．

問 1.6. $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ とする．また，f を V 上のスカラー場（函数）とする．$\varphi \colon U \to V$ が写像であるならば，U 上のスカラー場を $\varphi^* f = f \circ \varphi$ により定めることができることを確かめよ．また，U, V が開集合で f, φ が C^r 級ならば $\varphi^* f$ も C^r 級であることを確かめよ．
ヒント：用語が増えているが，要は $f \circ \varphi$ が U 上の函数であることを確かめれば良い．後半は微分積分学の復習である．

定義 1.7. $\varphi^* f$ を φ による f の引き戻しと呼ぶ．

（以上）

[†1] このように，写像（や函数）を定める際に何かしらの選択が絡むとき，最終的にはその選択に依らずに写像が定まることを，その写像は **well-defined** であると言う．日本語の文章でも特に訳語は充てない．