２０１７年度数理科学基礎II（理I 24–27組向け，足助担当）演習問題 6 v1 2017/5/15（月）

問 6.1. $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ が**リプシッツ連続**であるとは，$L \geq 0$ が存在して $\forall x, y \in \mathbb{R}^n,\ |f(x) - f(y)| \leq L\,\|x - y\|$ が成り立つことを言う．

1) f がリプシッツ連続ならば f は連続であることを示せ．
2) f はリプシッツ連続とし，$L_0 = \inf\{L > 0 \mid \forall x, y \in \mathbb{R}^n,\ |f(x) - f(y)| \leq L\,\|x - y\|\}$ と置く．$\forall x, y \in \mathbb{R}^n,\ |f(x) - f(y)| \leq L_0\,\|x - y\|$ が成り立つことを示せ．L_0 をリプシッツ定数と呼ぶことがある．
3) K を $\mathbb{R}^n$ の有界閉集合とし，$f\colon K \to \mathbb{R}$ を C^1 級とする．このとき，f はリプシッツ連続であることを示せ．
4) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $f(x) = |x|$ により定める．f はリプシッツ連続であるが，$x = 0$ で微分不可能であることを示せ．また，f のリプシッツ定数を求めよ．

問 6.2. $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ とする．f が $a \in \mathbb{R}^n$ において微分可能（全微分可能）であるならば，f の a における微分係数は一意的であることを示せ．

問 6.3. $f\colon \mathbb{R} \to M_n(\mathbb{R})$ とし，$f(t) = (f_{ij}(t))$ と成分で表すと f_{ij} はいずれも微分可能だとする．このとき $f'(t) = (f'_{ij}(t))$ と置く．即ち，f の微分を成分ごとに微分することにより定める．さて，$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ で n 次の正則な行列全体のなす集合を表し（$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ は $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$，$\mathrm{GL}(n; \mathbb{R})$ 等でも表す），$f\colon \mathbb{R} \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{R})$ とする．$g(t) = f(t)^{-1}$ とすると，g も微分可能であって，

$$g'(t) = -f^{-1}(t)f'(t)f^{-1}(t)$$

が成り立つことを示せ．
ヒント：$f(t)g(t) = E_n$ が成り立つ．両辺を微分してみよ．

問 6.4***.** $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ とする．また，$q \in \mathbb{R}^m,\ r > 0$ について $B_q(r) = \{y \in \mathbb{R}^m \mid \|y - q\| < r\}$ と置く．f が $p \in \mathbb{R}^n$ において連続である，即ち，

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ x \in \mathbb{R}^n,\ \|x - p\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(p)\| < \epsilon$$

が成り立つことと，条件

$$\forall r > 0,\ f^{-1}(B_{f(p)}(r)) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \in B_{f(p)}(r)\} \text{ は } \mathbb{R}^n \text{ の開集合である}$$

は同値であることを示せ．
ヒント：$B_{f(p)}(\epsilon) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y - f(p)\| < \epsilon\}$ が成り立つ．

問 6.5. 以下のように $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ を定め，$\Sigma = f^{-1}(0) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid f(x) = 0\}$ とする．

a) f は C^1 級であって，$p \in \Sigma$ について $Df(p) \neq 0\,(\in M_{3,1}(\mathbb{R}))$ が成り立つことを確かめよ．

b) $T_p\Sigma$ を求めよ．

c) Σ と，いくつか $p \in \Sigma$ を選んで $T_p\Sigma$ を図示せよ．

1) $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ とし，a, b, c のいずれかは 0 でないとする．そして $f(x_1, x_2, x_3) = ax_1 + bx_2 + cx_3 + d$ とする．

2) $r > 0$ とし，$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - r^2$ とする．

3) $R \neq 0$ とし，$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - R$ とする．
※ $R > 0$ の場合と $R < 0$ の場合で様子が異なる．余裕があれば「線型代数学」で扱う二次形式や二次曲面について調べてみよ．

4) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 - 1$ とする．

微分方程式について（１）

微分方程式は理屈の上でも実際にも大事である.「数理科学基礎」や「微分積分学」でも扱うことになっているが，あった方が望ましい予備知識の量が多いことや，時間の制約が大きいので，原則として演習問題としてごく基本的なことについて扱う．また，変数が二つ以上の微分方程式（偏微分方程式）は一般に難しいのでここでは変数は一つの場合（常微分方程式）を扱う．なお，きちんとしたことは「常微分方程式」で扱う[†1]．

定義 6.6. $I \subset \mathbb{R}$ を区間とする．r 回微分可能な函数 $f\colon I \to \mathbb{R}$ について，$f^{(r)}$ で f の r 回微分を表す．但し $f^{(0)} = f$ とする．また，$f^{(1)}, f^{(2)}$ はしばしば f', f'' などと表す（$r = 3$ 位までは通常は頑張る）．

定義 6.7. $I \subset \mathbb{R}$ を区間とする．r 回微分可能な函数 $f\colon I \to \mathbb{R}$ について，$f^{(0)}, \ldots, f^{(r)}$ を含む，f に関する方程式を $\boldsymbol{r}$ **階の常微分方程式**と呼ぶ．

例 6.8.

1) $I = \mathbb{R}$ とする．1 回微分可能な函数 $f\colon I \to \mathbb{R}$ に関する方程式 $f' = f$ は微分方程式である．後で示すように，これの解は $f(t) = f(0)e^t$ で与えられる．

2) $I = \mathbb{R}$ とする．3 階微分可能な函数 $f\colon I \to \mathbb{R}$ に関する方程式 $\dfrac{f'''}{f'} - \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{f''}{f'}\right)^2 = 0$ は微分方程式である．ただし，f' は 0 にならない範囲で考える．

[†1] 二年生になっても偏微分方程式はまだ難しい．とはいえ，波動方程式や熱方程式，コーシー・リーマン方程式など，基本的で重要な偏微分方程式は多い．難しいことはブラックボックスに入れてしまって先に進むことも必要である（が，講義ではやりにくい）．

微分方程式には**初期条件**あるいは**拘束条件**がしばしば課される．例えば，方程式

$$f' = f,\ f(0) = 1$$

の解は $f(t) = e^t$（のみ）であるが，一方，方程式

$$f' = f,\ f(0) = 2$$

の解は $f(t) = 2e^t$（のみ）である．同じ方程式ならば解も同じなのが自然なので，これらは同じ種類ではあるが異なる微分方程式と考えた方が自然である．状況が複雑になるのでここでは例示しないが，f の定義域が変わると解が変わることがある．この意味で，**微分方程式は解の定義域や初期条件が一体となったものである**．とはいえ，大雑把に

$$f' = f$$

を満たす f について調べたいときもある．このような場合には，解は $f(t) = ce^t,\ c \in \mathbb{R}$ である，などと言い，このように表される解達を**一般解**と総称する．

定理 6.9. $a \in \mathbb{R}$ とする．$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ とし，f は 1 回微分可能とする．また，$f' = af$ が成り立つとする．このとき，$f(t) = f(0)e^{at}$ が成り立つ（解はこれしかない）．逆も正しい（これらは全て解である）．

<u>証明</u>. 実際の証明はもっと簡潔にできるが，ここでは寄り道をしながら示す．
<u>解を（一つ）見つける</u>.

解が存在するとする．また,（都合良く）$f(t)$ は 0 にならないと仮定する．このとき，

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = a$$

が成り立つ．そこで両辺を t に関して 0 から s まで積分すると，

$$\int_0^s \frac{f'(t)}{f(t)}dt = \int_0^s adt$$

が成り立つ．$T = f(t)$ として，置換積分（ここでは高校までの要領で理解すれば良い．詳しくは積分の変数変換公式として A セメスターで扱う）を用いると

$$\int_{f(0)}^{f(s)} \frac{1}{T}dT = as$$

を得る．$f(t)$ は 0 にならないとしているので，左辺は $\log|f(s)| - \log|f(0)|$ に等しい．従って $|f(s)| = |f(0)|\,e^{as}$ が成り立つ．$e^{as} > 0$ なので，$s = 0$ の時を考慮して $f(s) = f(0)e^{as}$ と<u>してみる</u>と，$f'(s) = af(0)e^{as} = af(s)$ が成り立ち，f は $f' = af$ の解である．また，$f(s)$ は確かに 0 にならない（$f(0)$ は仮定により 0 ではない）．

解を全て求める．

$f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を解とする．$g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を

$$g(t) = f(t)e^{-at}$$

により定める．$f'(t)=af(t)$ であるから，

$$\begin{aligned} g'(t) &= f'(t)e^{-at} - af(t)e^{-at} \\ &= af(t)e^{-at} - af(t)e^{-at} \\ &= 0 \end{aligned}$$

が成り立つ．従って（平均値の定理により）g は定数である．それを c とする．すると，$c = f(t)e^{-at}$ なので $f(t) = ce^{at}$ が成り立つ．$t=0$ とすると $f(t) = f(0)e^{at}$ を得る．逆に，$f(t) = f(0)e^{at}$ ならば f は $f' = af$ を満たす．$\square$

注 6.10. 1) 上のように，$f' =$（f の式）と表されるような微分方程式を**自励系**（の方程式）と呼ぶ．また，もう少し一般に $f' =$（f の式）$\times$（t の式）と表されるような微分方程式を**変数分離形**の方程式と呼ぶ．変数分離形の方程式は積分が具体的に表示されるかどうかは別として，原理的には上の方法で解くことができる．

2) 上のような微分方程式の解き方は**定数変化法**と呼ばれ，基本的である．直接的には少し形が異なるが，次のように考えている．即ち，$f' = af$ の解を見つけた時点で，解は多かれ少なかれ $f(t) = ce^{at}$ と表されると考える．まだ c が定数かどうかは分かっていないので，c も t の函数とする．すると

$$f'(t) = c'(t)e^{at} + ac(t)e^{at}$$

が成り立つので，これが $af(t)$ に等しければ $c'(t)e^{at} = 0$ が成り立つ．$e^{at} > 0$ なので $c'(t) = 0$ が成り立ち，c は定数である．

（以上）