

2017年度数理科学基礎II(理I 24-27組向け, 足助担当) 演習問題 5 v2 2017/5/8 (月)
'17/5/8: 問 5.6 の誤植を修正.

定義 5.1. $U \subset \mathbb{R}^n$ とし, $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ とする. また, $a \in U$ とする. f が a において上半連続であるとは, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, x \in U, \|x - a\| < \delta \Rightarrow f(x) < f(a) + \varepsilon$ が成り立つことを言う. また, f が a において下半連続であるとは, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, x \in U, \|x - a\| < \delta \Rightarrow f(a) - \varepsilon < f(x)$ が成り立つことを言う.

右連続・左連続と名前は似ているが, 内容は全く異なるので注意すること.

問 5.2. $U \subset \mathbb{R}^n$ とし, $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ とする. また, $a \in U$ とする. f が a において連続であることと, f が a において上半連続かつ下半連続であることは同値であることを示せ.

問 5.3. $U \subset \mathbb{R}^n$ とし, $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ とする. f が $(U$ 上) 上半連続であることと, $-f$ が下半連続であることは同値であることを示せ.

問 5.4*. $K \subset \mathbb{R}^n$ を有界閉集合とし, $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ は上半連続とする.

- 1) f は $(K$ 上) 上に有界であることを示せ.
- 2) f が下に有界でないような例を一つ挙げよ.
ヒント: f は K 上連続ではあり得ない.
- 3) f は K 上で最大値を取ることを示せ.

問 5.5. $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ を $a_n = \frac{1}{n}$ と置くことにより定める.

- 1) a は $n \rightarrow +\infty$ において 0 に収束することを示せ.
- 2) $b_n = \cos \frac{\pi}{a_n}$ と置く. $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ は $n \rightarrow +\infty$ において収束しないことを示せ.
- 3) $b_n = \cos \frac{2\pi}{a_n}$ と置く. $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ は $n \rightarrow +\infty$ において収束することを示せ.
- 4) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を $f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$ により定める. $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n)$ を求め, $f(0)$ と比較せよ.
- 5) $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を $g(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0 \end{cases}$ により定める. $\lim_{n \rightarrow +\infty} g(a_n)$ を求め, $g(0)$ と比較せよ.

※ (a_n) が $n \rightarrow +\infty$ に於いて a に収束するとする. $b_n = (a_n$ の「それっぽい」函数) であっても, 函数が a において連続でなかったり, そもそも定義されていなければ, (b_n) について何が起きるのかは直ちには分からない.

問 5.6. $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ は条件

a) $\forall x \in \mathbb{R}^n, f(x) \geq 0$, かつ, 等号は $x = o$ の時のみ成り立つ.

b) $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, f(x+y) \leq f(x) + f(y)$.

c) $\forall x \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}, f(\lambda x) = |\lambda| f(x)$

をみたすとする (このような f を \mathbb{R}^n 上のノルムと呼ぶ). また, $\|\cdot\|$ を \mathbb{R}^n の標準的なノルムとし, $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$ と置く.

1) S^{n-1} は有界閉集合であることを示せ.

2) $g: S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ を $g(x) = f(x) = \frac{f(x)}{\|x\|}$ と置く. g は連続であることを示せ. また, g は最小値をとり, それは正の値であることを示せ.

3) 正の実数 M が存在して

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \frac{1}{M} \|x\| \leq f(x) \leq M \|x\|$$

が成り立つことを示せ.

ヒント: 2) の g を用いるのが簡単である.

4) p を正の整数とし, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ について $\|x\|_p = (|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}$ と置く. また, 形式的に $\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$ と置く. $\|\cdot\|_p, 1 \leq p \leq \infty$ は \mathbb{R}^n 上のノルムであることを示せ.

ヒント: Minkowski, Hölder の不等式について調べてみよ.

5) $f(x) = \|x\|_p$ としたとき 3) における M の最小値を求めよ.

問 5.7*. $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ は条件

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, x, y \in \mathbb{Q}, |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

を満たすとする (f は \mathbb{Q} 上で連続だとする).

1) $z \in \mathbb{R}$ について, 有理数列 (有理数からなる数列) $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ を $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = z$ なるように一つ選ぶ. このとき, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n)$ が存在し, また, 収束極限は $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ の選び方に依らないことを示せ. この値を $g(z)$ とする.

2) $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ は連続であることを示せ.

(以上)