２０１７年度数理科学基礎II（理I 24–27組向け，足助担当）演習問題 1 v1 2017/4/10（月）

問 1.1. 以下の主張が成り立つことを確かめよ．

1) $A=\{0,1\},\ B=\{1\}$ とする．$A\not\subset B$ と $A\supset B$ の両方が成り立つ．
2) $A=\{0,1\},\ B=\{1,2\}$ とする．$A\not\subset B$ は成り立つが，$A\supset B$ は成り立たない．
3) $A=B=\{0\}$ とする．$A\not\subset B$ は成り立たない，即ち $A\subset B$ は成り立つ．一方，$A\supset B$ は成り立つ．
4) $A=\{0\},\ B=\{0,1\}$ とする．$A\not\subset B$ も $A\supset B$ も成り立たない．

従って，$A\not\subset B$ と $A\supset B$ の間には論理的な関係はない．

問 1.2. $\mathbb{R}^2=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\middle|\, x,y\in\mathbb{R}\right\}$ と置く．また，$\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2\setminus\left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\}$ とする．このとき，$\mathbb{R}^2$ の部分集合 V を

$$V=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2\,\middle|\,\exists\lambda\in\mathbb{R},\ \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}\right\}$$

により定める．V は直感的には直線を表す．

1) $u,w\in V$ とすると，ある $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ について $u=\lambda\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}$, $w=\mu\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}$ が成り立つことを示せ．
2) $u,v\in V$ を 1) のように表す．このとき，$u=w$ が成り立つのは $\lambda=\mu$ が成り立つとき，その時のみであることを示せ．
3) $\varphi\colon\mathbb{R}\to V$ を
$$\varphi(\lambda)=\lambda\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}$$
により定めると，φ は $\mathbb{R}$ から V への全単射であることを示せ．

問 1.2 により，$\mathbb{R}$ の元と V の元には一対一の対応が付く．実際，$\lambda\in\mathbb{R}$ に対しては $\varphi(\lambda)\in V$ を考え，$v\in V$ については $v=\lambda\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}$ なる $\lambda\in\mathbb{R}$，即ち $v=\varphi(\lambda)$ が成り立つような唯一の $\lambda\in\mathbb{R}$ を考えれば良い．$\mathbb{R}$ の元はもちろん実数である，一方，V の元は $\mathbb{R}^2$ のベクトルであるから，一対一の対応があるものの，$\mathbb{R}$ と V は異なる．

問 1.3. A,B はいずれも空集合ではないとし，$f\colon A\to B$ を定値写像とする．以下が成り立つことを示せ．

1) $B=\{b\}$（一つの元からなる集合）であることと，f が全射であることは同値である．
2) $A=\{a\}$ であることと，f が単射であることは同値である．
3) $A=\{a\},\ B=\{b\}$ が成り立つことは f が全単射であることと同値である．

※ このようなことが成り立つのは f が定値写像だからであって，一般には状況はもっと複雑である．

問 1.4. A, B, C を集合とし，$f\colon A \to B$，$g\colon B \to C$ を写像とする．このとき，以下が成り立つことを示せ．

1) $g \circ f$ が単射ならば f は単射である．
2) $g \circ f$ が全射ならば g は全射である．
3) f, g が共に単射ならば $g \circ f$ は単射である．
4) f, g が共に全射ならば $g \circ f$ は全射である．
5) f, g が共に全単射ならば $g \circ f$ は全単射である．

2) のみ解を記す．間違っても暗記してはいけないが，参考にはすること（もっと簡潔に書くことが多いが，ここでは敢えて冗長にしてある）．

2) の解答例．主張

$$(*) \qquad \forall c \in C,\ \exists b \in B,\ g(b) = c$$

が成り立つことを示せば良い．$c \in C$ とする．$g \circ f$ は全射だから，$\forall c \in C,\ \exists a \in A,\ c = (g \circ f)(a)$ が成り立つ．そこで $a \in A$ を $c = (g \circ f)(a)$ が成り立つものとする．$b = f(a)$ とすれば $b \in B$ であって $g(b) = g(f(a)) = c$ が成り立つ．従って主張 $(*)$ が成り立つので，g は全射である． □

問 1.4 の逆の主張はほとんど全て成り立たない．

問 1.5. A, B, C を集合とし，$f\colon A \to B$，$g\colon B \to C$ を写像とする．

1) f は単射であるが $g \circ f$ は単射でないような例を一つ挙げよ．
2) g は全射であるが $g \circ f$ は全射でないような例を一つ挙げよ．
3) $g \circ f$ は単射であるが g は単射でないような例を一つ挙げよ．
4) $g \circ f$ は全射であるが f は全射でないような例を一つ挙げよ．

問 1.6. A, B を集合とし，$f\colon A \to B$ を写像とする．このとき，f の逆写像 g が存在することと，f が全単射であることは同値であることを示せ．
ヒント：問 1.4 を用いると容易である．

（以上）