２０１７年度微分積分学（理 I 24–27 組向け，足助担当）演習問題 24 v2　’17/12/11（月）
’17/12/11：補題 24.9 以降を追加.

問 24.1. 次に挙げる函数の，与えられた点を中心とするテーラー展開を求めよ．また，求めたテーラー展開の収束半径を求めよ.

1) $f(x) = \sin x^2$ とし，中心は 0 とする.
2) $f(x) = \sin x$ とし，中心は $\dfrac{\pi}{2}$ とする.
3) $f(x) = x - x^2$ とし，中心は 1 とする.
4) $f(x) = \log(1 + x^2 + x^3)$ とし，中心は 0 とする.
5) $f(x, y) = \sin(x + y)$ とし，中心は $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ とする.
6) $f(x, y) = e^x \cos y$ とし，中心は $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ とする.
7) $f(x, y) = e^{x+x^2}$ とし，中心は 0 とする.
8) $f(x, y) = \dfrac{1}{1 + x}$ とし，中心は 0 とする.
9) $f(x, y) = \dfrac{1}{1 + x}$ とし，中心は 1 とする.
10) $f(x) = \tan^{-1} x$ とする．ただし，$f(0) = 0$ であるとする．また，中心は 0 とする.

問 24.2. ここではテーラー展開の中心は 0 とする．また，$\cos x$ のテーラー展開を $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ とする.

1) a_n を求めよ.
2) $k \in \mathbb{N}^+$ とする．$\cos x^k$ のテーラー展開は $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{kn}$ であることを示せ.
3) $\displaystyle\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right)^2$ を計算し，$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ の形に表せ．また，$\cos^2 x$ のテーラー展開を定義に戻って直接求め，$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ と比較せよ.
4) $\cos^2 x = \dfrac{\cos 2x + 1}{2}$ であることを用いて $\cos^2 x$ を，$\cos x$ のテーラー展開を用いて級数として表し，直接求めたテーラー展開と比較せよ.

問 24.3. $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x}$, $\coth = \dfrac{1}{\tanh x}$ と定め，それぞれ**双曲余弦函数**，**双曲正弦函数**，**双曲正接函数**，**双曲余接函数**と呼ぶ．また，これらを総称して**双曲線函数**と呼ぶ．

1) それぞれについて，0 を中心とするテーラー展開とその収束半径を求めよ．
2) それぞれについて，三角函数の加法公式の類似が成り立つ．これらを具体的に表し証明せよ．

問 24.4. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は原点において微分可能であるとする．$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{x}, & x \neq 0, \\ Df(0), & x = 0 \end{cases}$$

により定める．

1) g は連続であることを示せ．
2) $f(0) = 0$ とすると，ある連続な函数 $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が存在して $f(x) = xh(x)$ が $\mathbb{R}$ 上成り立つことを示せ．
3) f は $(-\epsilon, \epsilon) \subset \mathbb{R}$ 上解析的だとする．g は $(-\epsilon, \epsilon) \subset \mathbb{R}$ 上解析的であることを示せ．
4) f は $(-\epsilon, \epsilon) \subset \mathbb{R}$ 上 C^∞ 級だとする．g は $(-\epsilon, \epsilon) \subset \mathbb{R}$ 上 C^∞ 級であることを示せ．

※ 3) は 4) のヒントというわけではなく，4) のほうが恐らく難しいのでこの順序にした．

問 24.5. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は単調増加であるとする．このとき，$\lim_{x \to +\infty} f(x)$ は $+\infty$ に発散するか，あるいはある実数に収束することを示せ．
ヒント：例えば単調増加な数列の収束（あるいは発散）の話に帰着することができる．

問 24.6. P を多項式とし，$x \in \mathbb{R}$ について $f(x) = \dfrac{P(x)}{e^x}$ と置く．$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ が成り立つことを示せ．

問 24.7. $x > 0$ について $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$ と置く．

1) 各 $n \in \mathbb{N}^+$ について，高々 $(n-1)$ 次の多項式 P_n が存在して $D^n f(x) = \dfrac{P_n(x)}{x^{2n}} e^{-\frac{1}{x}}$ が成り立つことを示せ．
2) 各 $n \in \mathbb{N}$ について（$n = 0$ の場合も含むので注意）$\lim_{x \to +0} D^n f(x) = 0$ が成り立つことを示せ．

3) $g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を $g(x)=\begin{cases} f(x), & x>0,\\ 0, & x\le 0\end{cases}$ により定める．g は C^∞ 級であることを示せ．

4) g は $(-1,1)$ 上でテーラー展開不可能であることを示せ．

問 24.8. $\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$ を $z=x+\sqrt{-1}y$ と同一視することにより，$\mathbb{R}^2$ を $\mathbb{C}$ とみなす．$f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{C}$ が微分可能である時，形式的に

$$\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}-\sqrt{-1}\frac{\partial f}{\partial y}\right),$$
$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\sqrt{-1}\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

と置く．$f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{C}$ は $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z)=0$ をみたすとし，以下の問に答えよ．

1) ${}^tDf(x,y)Df(x,y)=\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)^2+\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)^2\right)E_2$ が成り立つことを示せ．従って $Df(x,y)$ は直交行列の定数倍である．

2) $\langle\cdot|\cdot\rangle$ で $\mathbb{R}^2$ の通常の内積を表す．$v,w\in\mathbb{R}^2$ とし，$D_vf(0),D_wf(0)$ をそれぞれ f の 0 における v 方向，w 方向への微分とする．$v,w\neq 0$ かつ $Df(0)$ は正則であるとすると $\dfrac{\langle D_vf(0)\mid D_wf(0)\rangle}{\|D_vf(0)\|\,\|D_wf(0)\|}=\dfrac{\langle v\mid w\rangle}{\|v\|\,\|w\|}$ が成り立つことを示せ（これは $D_vf(0)$ と $D_wf(0)$ のなす角は v と w のなす角と等しいことを意味する）．

一様コーシー列についての補足．

ここでは講義で証明を省略した次の補題（補題 6.2.4，演習では補題 23.25）を示す．なお，講義では T は区間としたが，例えば $T=\mathbb{N}$ であったり，$T=\left\{\dfrac{1}{n}\mid n\in\mathbb{N},\ n\ge 1\right\}$ としても良く用いる．なお問 22.2 も参照のこと．

補題 24.9. $U\subset\mathbb{R}^n$ とし，$T\subset\mathbb{R}$ を上あるいは下に閉じていないとする．各 $t\in T$ について $f_t\colon U\to\mathbb{R}$ が与えられているとき，次は同値である．

1) T は上に非有界とする．

a) $t\in T,\ t\to+\infty$ の時 $(f_t)_{t\in T}$ はある $f\colon U\to\mathbb{R}$ に U 上一様収束する．

b)

$$\forall\epsilon>0,\ \exists t_0>0,\ (t,s>t_0\Rightarrow \sup_{x\in U}|f_t(x)-f_s(x)|<\epsilon)$$

が成り立つ（$\{f_t\}$ は**一様コーシー条件**を満たす，あるいは**一様コーシー列**であると言う）．

2) a') $t \in T,\ t \to 0$ の時 $(f_t)_{t\in T}$ はある $f\colon U \to \mathbb{R}$ に U 上一様収束する．

b')

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ (|t| < \delta, |s| < \delta \Rightarrow \sup_{x\in U} |f_t(x) - f_s(x)| < \epsilon)$$

が成り立つ．

問 24.10. ここでは 1) について扱う．2) についても同様である．

1) a) が成り立つとする．

i) $\epsilon > 0$ について，

$$\exists t_0 > 0,\ \left(t \in T,\ t > t_0 \Rightarrow \sup_{x\in U} |f_t(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2} \right)$$

が成り立つことを示せ．

ii) $t, s > t_0$ ならば

$$\sup_{x\in U} |f_t(x) - f_s(x)| < \epsilon$$

が成り立つことを示せ．

ヒント：$f_t(x) - f_s(x) = (f_t(x) - f(x)) - (f_s(x) - f(x))$ が成り立つ．

2) b) が成り立つとする．

i) $x \in U$ を固定し，$t_n \in T$ を $t_n \to +\infty$ であるように選ぶ．$(f_t(x))_{t\in T}$ はコーシー列であることを示せ．従って $t \to +\infty$ で $(f_t(x))_{t\in T}$ は収束するので，収束極限を $f(x)$ と置く．f を函数とみなせば $f\colon U \to \mathbb{R}$ である．

ii) $\epsilon > 0$ とし，t_0 を $t, s > t_0 \Rightarrow \sup_{x\in U} |f_t(x) - f_s(x)| < \dfrac{\epsilon}{4}$ が成り立つように選ぶ．ここで $y \in U$ とする．$t_1 \in T$ が存在して $s > t_1$ ならば $|f_s(y) - f(y)| < \dfrac{\epsilon}{4}$ が成り立つ．$t > t_0$ とすると

$$|f_t(y) - f(y)| \leq \frac{\epsilon}{2}$$

が成り立つことを示せ．

ヒント：$|f_t(y) - f(y)| \leq |f_t(y) - f_s(y)| + |f_s(y) - f(y)|$ が成り立つ．s は一時的なものなので，ある程度恣意的に選べる．

従って $\sup_{y\in U} |f_t(y) - f(y)| \leq \dfrac{\epsilon}{2} < \epsilon$ が成り立ち，$(f_t)_{t\in T}$ は $t \to +\infty$ で f に U 上一様収束する．

（以上）