２０１７年度微分積分学（理 I 24–27 組向け，足助担当）演習問題 23 v3　　'17/12/4（月）

'17/12/4：Laplace 変換に関する問を追加.

'17/12/6：講義で詳しく扱わなかった事柄に関する問（問 23.21 以降）を追加.

'17/12/11：補題 23.25 を修正.

問 23.1 (Sophomore's dream). $f\colon [0,1]\to\mathbb{R}$ を $f(x)=\begin{cases}x^{-x}, & x\in(0,1],\\ 1, & x=0\end{cases}$ により定める.

1) f は連続であることを示せ.
2) $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx=\lim_{\epsilon\to 0}\int_\epsilon^1 x^{-x}dx\ \left(=\int_{0+0}^1 x^{-x}dx\right)$ が成り立つことを示せ．以下ではこれらを特に区別しない.
3) $\displaystyle\int_0^1 x^{-x}dx=\int_0^1 e^{-x\log x}dx=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1\frac{(-x\log x)^n}{n!}dx$ が成り立つことを示せ.
   ※ 最後の等号は，単に指数函数をテーラー展開しただけでは得られず，無限和と積分を交換する必要がある.
4) $\displaystyle\int_0^1(-x\log x)^n dx=\frac{1}{(n+1)^{n+1}}\int_0^{+\infty}t^ne^{-t}dt\frac{1}{(n+1)^{n+1}}\Gamma(n+1)$ が成り立つことを示せ.
5) $\displaystyle\int_0^{+\infty}t^ne^{-t}dt=n!$ が成り立つことを示せ.
6) $\displaystyle\int_0^1 x^{-x}dx=\sum_{n=1}^{+\infty}n^{-n}$ が成り立つことを示せ.

問 23.2. $U\subset\mathbb{R}^n$ を部分集合とし，各 $n\in\mathbb{N}^+$ について f_n は U 上で定義された $\mathbb{R}^m$ 値函数であるとする．また，$f\colon U\to\mathbb{R}^m$ とする．$\{f_n\}$ が $n\to+\infty$ の時 f に U 上一様収束するならば，$\{f_n\}$ は $n\to+\infty$ の時 U 上 f に各点収束することを示せ．また，逆が成り立たないような例を $U=\mathbb{R},\ m=1$ の場合に一つ挙げよ.

問 23.3. 以下の積分を求めよ.

1) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{\sin x\cos x}$
2) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$

問 23.4. $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x^2}dx$ を小数点以下二桁の位（百分の一の位）まで求めよ．なお，小数点以下三桁目以降は（四捨五入などを行うのではなく）切り捨てること．また，単に値を示すのではなく，なぜその計算で正しく求まるのか，その理由も述べる（証明をつける）こと．

問 23.5. 1) $\mathbb{R}^2$ の部分集合 D_1 を

$$D_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2 - y^2 + 1 \geq 0,\ 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2},\ 0 \leq y\right\}$$

により定める．D_1 の概形を図示し，

$$\int_{D_1} y\frac{\sin x}{1+x^2}dxdy$$

を求めよ．

2) $\mathbb{R}^3$ の部分集合 D_2 を

$$D_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, y^2 + z^2 \leq x^2,\ 0 \leq x\right\} \cap \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\right\}$$

により定める．D_2 の概形を図示し，

$$\int_{D_2} e^{-(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}dxdydz$$

を求めよ．

問 23.6. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を

$$f(t) = \int_0^2 \frac{1+tx}{1+tx+(tx)^2}dx$$

により定める．f の原点（$t=0$）におけるテーラー展開（剰余項のないもの．テーラー級数と呼ぶこともある）を求めよ．また，級数の収束半径を求めよ．

問 23.7.

$$T = \left\{ f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{array}{l} f \text{ は連続であって，また，ある } M \geq 0 \text{ が存在} \\ \text{して } |x| > M \Rightarrow f(x) = 0 \text{ が成り立つ} \end{array} \right\}$$

と置く（条件中の M は f に依存するので注意せよ）．また，$\delta_0\colon T \to \mathbb{R}$ を

$$\delta_0(f) = f(0)$$

により定める．

1) $G\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を連続とする．$f \in T$ とすると，$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} G(x)f(x)dx$ は実際には広義積分ではなく，値も有限であることを示せ．

2) $Y\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を $Y(x)=\begin{cases}1, & x\geq 0,\\ 0, & x<0\end{cases}$ により定める[†1]．$f\in T$ かつ f が C^1 級ならば

$$\delta_0(f)=-\int_{-\infty}^{+\infty}Y(x)\frac{df}{dx}(x)dx$$

が成り立つことを示せ．

3) $G\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を連続とする．$p\in\mathbb{R}$ について $G(p)\neq 0$ が成り立つならば，任意の $\epsilon>0$ についてある $f_\epsilon\in T$ が存在して

i) $\forall x\in\mathbb{R},\ f_\epsilon(x)\geq 0$，

ii) $x\in\mathbb{R},\ |x-p|>\epsilon\Rightarrow f_\epsilon(x)=0$，

iii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}G(x)f_\epsilon(x)dx\neq 0$

が成り立つことを示せ．

4) 連続函数 $G\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ であって，条件

$$f\in T \text{ ならば } \delta_0(f)=\int_{-\infty}^{+\infty}G(x)f(x)dx(=f(0)) \text{ が成り立つ}$$

を満たす物は存在しないことを示せ．

問 23.8. 以下の積分（定積分，不定積分あるいは広義積分）を求めよ．途中経過も大事であるが，まずは結論（計算結果）を求めてみよ．

1) $\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$.

2) $\displaystyle\int\frac{dx}{a+b\tan x}$，ただし a,b の少なくとも一方は 0 でないとする．

3) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dx}{e^{ax}+e^{-ax}}$，ただし $a>0$ とする．

問 23.9. 次の極限（極限値）を求めよ．

1) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}$

[†1] Y はヘヴィサイド函数（Heaviside function）の類似である．ヘヴィサイド函数については $Y(0)=\dfrac{1}{2}$ とするのが通例であって，ここでの Y とは異なる．

2) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_1^2 \log\left(n\sin\frac{x}{n}\right)dx$

問 23.10. $R>0$ とし，S_R を $\mathbb{R}^3$ 内の，原点を中心とする半径 R の球面とする．即ち，

$$S_R = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=R^2\}$$

と置く．また，$\theta\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ について，S_R の部分集合 $D_R(\theta)$ を

$$D_R(\theta) = S_R\cap\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid z\geq R\cos\theta\}$$

により定める．

1) $r\geq 0$ を

$$D_R(\theta) = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid z=\sqrt{R^2-x^2-y^2},\ x^2+y^2\leq r^2\}$$

が成り立つように定める．r を R と θ を用いて表せ．

2) $D_R(\theta)$ の概形を図示せよ．

3) r は 1) で求めたものとし，$B_r=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\leq r^2\}$ と置く．$f_R\colon B_R\to\mathbb{R}$ を $f_R(x,y)=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ により定め，$A_R(\theta)$ を

$$A_R(\theta)=\int_{B_r}\sqrt{1+(D_xf_R(x,y))^2+(D_yf_R(x,y))^2}\,dxdy$$

により定める．ここで $D_xf_R=\dfrac{\partial f_R}{\partial x}$，$D_yf_R=\dfrac{\partial f_R}{\partial y}$ である．$A_R(\theta)$ を r を用いて（積分記号を含まない形で）表せ．

※ ここでは直接計算することを想定しているが，面積の定義を知っていれば，$A_R(\theta)$ は $D_R(\theta)$ の面積であることを示し，このことを用いて解くこともできる．

4) r が一定であるように R と θ が変化するとする．このとき，$\displaystyle\lim_{R\to+\infty}A_R(\theta)$ を求めよ．

問 23.11. $I=(-1,1)$ とし，I 上の函数 f を $t\in I$ について

$$f(t)=\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$$

と置くことにより定める．

1) f の $t=0$ を中心とするテーラー級数（剰余項のないテーラー展開）を求めよ．また，求めた級数（冪級数）の収束半径を求めよ．

2) I 上の函数 g を $x \in I$ について

$$
\begin{aligned}
g(x) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x \sin\theta)\, d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - x^2 \sin^2\theta}}
\end{aligned}
$$

により定める．g の $x = 0$ を中心とするテーラー級数を求めよ．また，求めた級数（冪級数）の収束半径を求めよ．

※ この積分は**楕円積分**と呼ばれ，初等函数では表せない（簡単な函数の組み合わせで表すことができない）ことが知られている．そこで，積分の形のままテーラー級数を求める必要がある．

問 23.12. $a, b \in \mathbb{R}$，$a < b$ とし，$f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ を連続な函数とする．このとき，f は $[a,b)$ 上広義リーマン可積分（広義リーマン積分可能）であって，$\displaystyle\int_{[a,b)} f(x)dx = \int_{[a,b]} f(x)dx$ が成り立つことを示せ．ただし，f が $[a,b]$ 上リーマン可積分であることは証明せずに用いてよい．

Laplace 変換

ここでは $[0,+\infty)$ 上で定まった函数 f であって，$f(x)$ の $x \to +\infty$ での挙動が比較的単純であるものについて考える．

問 23.13.

$$
V = \left\{ f\colon [0,+\infty) \to \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{array}{l} f \text{ は連続であって，かつ，ある多項式 } P \text{ が} \\ \text{存在して } \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{P(x)} = 0 \text{ が成り立つ} \end{array} \right\},
$$

$$
V' = \left\{ f\colon [0,+\infty) \to \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{array}{l} f \text{ は連続であって，かつ，ある多項式 } P \text{ と } M > 0 \text{ が} \\ \text{存在して } x > M \text{ ならば } |f(x)| \le |P(x)| \text{ が成り立つ} \end{array} \right\},
$$

$$
V'' = \left\{ f\colon [0,+\infty) \to \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{array}{l} f \text{ は連続であって，かつ，ある } n > 0 \text{ と } M > 0 \text{ が} \\ \text{存在して } x > M \text{ ならば } |f(x)| \le x^n \text{ が成り立つ} \end{array} \right\},
$$

$$
W = \left\{ f\colon [0,+\infty) \to \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{array}{l} f \text{ は連続であって，かつ，} t > 0 \text{ のとき} \\ \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-tx} f(x)dx \text{ は収束する} \end{array} \right\}
$$

と置く．$f \in W$ について，$\mathcal{L}f\colon (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ を

$$
\mathcal{L}f(t) = \int_0^{+\infty} e^{-tx} f(x)dx
$$

により定め，f の**ラプラス変換**と呼ぶ[†2]．$\mathcal{L}f$ は $\mathcal{L}(f)$ 等とも表す（全く異なる記号を用いることもある）．

1) $V = V' = V''$ が成り立つことを示せ．また，これらの等しい空間は実線型空間であることを示せ．
2) $V \subset W$ が成り立つことを示せ．また，W は実線型空間であり，V は W の部分線型空間（線型部分空間）であることを示せ．
3) $f \in W$ とし，f は C^1 級であるとする．すると $Df = f' \in W$ であって，更に $(\mathcal{L}Df)(t) = -f(0) + t(\mathcal{L}f)(t)$ が成り立つことを示せ．
   ヒント：最後の式を示せば $f' \in W$ が成り立つことも示したことになる（何故か？）．
4) $f(x) = \sin x$ とすると，$f \in V$ が成り立つことを示せ．また，$\mathcal{L}f$ を求めよ．
5) $f \in W$，f は C^2 級と仮定し，$D^2 f(x) + 2Df(x) + f(x) = \sin x$ が成り立つとする．$\mathcal{L}f$ をなるべく簡潔に表せ．
6) $C = \{f\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R} \mid f \text{ は連続}\}$ と置く．$\mathcal{L}$ を W から C への写像と看做すと線型写像であることを示せ．

$\mathcal{L}f = g$ とする．もし「$\mathcal{L}^{-1}g$」にあたる函数，あるいは $\mathcal{L}$ の「逆写像 $\mathcal{L}^{-1}$」を考えることができるのであれば f が求まることになる．これについては後で述べる．

注 23.14. $f \in W$ について
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-tx} f(x)\,dx$$
を考えたくなることも少なくない（**両側 Laplace 変換**などと呼ばれる）が，$x > 0$ とすると e^{-tx} は $t \to -\infty$ で $+\infty$ に発散するので，f が付加的な条件をみたさないとこの積分を考えることはできない．例えば $\dfrac{\sin x}{x}$ は都合の良い函数である．一方，e^x は最も基本的な函数の一つであるが，都合が悪い．

問 23.15. 1) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ とする．$D\mathcal{L}f$ を求めよ．

2) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ を求めよ．

[†2] W としてもっと大きな空間を用いる，つまりもっと色々な函数たちについてラプラス変換を考えることができる．ここでは細かいことを気にせずにすむようにやや小さい空間を用いている．即ち，考える函数にやや制限を加えている．W に属さない函数のラプラス変換は定義されたとしても，例えば定義域が $(0, +\infty)$ よりも小さくなることがある．

略解. $g(x,t)=e^{-tx}\dfrac{\sin x}{x}$, $J=[0,+\infty)$, $I=(0,+\infty)$ とする．g は $I\times J$ 上連続である．また，

$$\left|\int_1^{+\infty} g(x,t)dx\right| \leq \int_1^{+\infty} e^{-tx}\frac{1}{x}dx \leq \int_1^{+\infty} e^{-tx}dx = \frac{1}{et}$$

が成り立つことから，$t\in I$ について $g(x,t)$ は J 上広義可積分である．従って f は Laplace 変換可能であって，

$$\mathcal{L}f(t)=\int_0^{+\infty} g(x,t)dx = \int_0^{+\infty} e^{-tx}\frac{\sin x}{x}dx$$

が（定義により）成り立つ．また，$\mathcal{L}f$ は I 上 C^1 級であることが示せ（証明は考えてみること）

$$D\mathcal{L}f(t)=\int_0^{+\infty} D_t g(x,t)dx = \int_0^{+\infty} -e^{-tx}(\sin x)dx$$

が成り立つ．ところで，

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} -e^{-tx}(\sin x)dx &= \left[e^{-tx}\cos x\right]_0^{+\infty} + t\int_0^{+\infty} e^{-tx}(\cos x)dx \\
&= -1 + t\left[e^{-tx}\sin x\right]_0^{+\infty} + t^2\int_0^{+\infty} e^{-tx}(\sin x)dx \\
&= -1 + t^2\int_0^{+\infty} e^{-tx}(\sin x)dx
\end{aligned}$$

より，

$$\int_0^{+\infty} -e^{-tx}(\sin x)dx = \frac{-1}{1+t^2}$$

が成り立つ．さて，容易に分かるように $\lim_{t\to+\infty}\mathcal{L}f(t)=0$ が成り立つ．また，$\mathcal{L}f(0)=\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin x}{x}dx$ であるから，

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx &= -\int_0^{+\infty} D\mathcal{L}f(t)dt \\
&= \int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^2}dt \\
&= \left[\arctan t\right]_0^{+\infty} \\
&= \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

が成り立つ．なお，積分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ はディリクレ積分と呼ばれる． □

Laplace 逆変換

g が与えられているとして，f に関する方程式 $\mathcal{L}f = g$ を解くことを考える．問 23.13 のような方法で微分方程式を解こうとするとこのような作業が必要となる．

まず，ラプラス変換を次のように拡張する．$\mathbb{C}^+ = \{\tau \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\,\tau > 0\}$ と置く（これはここでの記号である）．

定義 23.16. $f \in W$ とする．$\tau \in \mathbb{C}^+$ について

$$\mathcal{L}f(\tau) = \int_0^{+\infty} e^{-\tau x} f(x) dx$$

と置き，f の Laplace 変換と呼ぶ．

次が成り立つ．現時点の知識で証明できて，難しくはないがここでは省略する．

定理 23.17. $f \in W$ について $\mathcal{L}f \colon \mathbb{C}^+ \to \mathbb{C}$ は複素解析的である．

ここで，$h \colon \mathbb{C}^+ \to \mathbb{C}$ が複素解析的であるとは，h が Cauchy–Riemann 方程式を満たすことをいう．直感的には h が z のみの，$\overline{z}$ を含まない函数であることである．

定義 23.18. $g \colon \mathbb{C}^+ \to \mathbb{C}$ を連続とする．$c > 0$ とし，$t > 0$ について

$$\mathcal{B}_c g(t) = \lim_{R \to +\infty} \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{c-\sqrt{-1}R}^{c+\sqrt{-1}R} e^{tx} g(x) dx$$

と置く（この積分は**ブロムウィッチ積分**（Bromwich integral）と呼ばれる）．

このように定めると次が成り立つ．

定理 23.19. $f \in W$ とする．$g = \mathcal{L}f$ とすると，

$$f = \mathcal{B}_c g$$

が成り立つ．

そこで W の元や，そのラプラス変換により得られる函数を考える限りにおいて $\mathcal{B}_c$ を**ラプラス逆変換**と呼び，$\mathcal{L}^{-1}$ で表す[†3]．

[†3] 実用上はこれでは考えられる函数が少なすぎるので，例えば $\mathcal{L}f(\tau)$ を考える τ の範囲や，あるいは $\mathcal{B}_c g(t)$ を考える c や t の範囲を制限して，その代わりに函数を増やしたりする．その場合にも，基本的にはここで扱っている場合と議論は多くは同様である．

例 23.20. 1) $n \geq 0$ とし，$f_n\colon [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ を $f_n(x) = x^n$ により定める．ただし，$x^0 = 1$ と定める．すると，$\tau \in \mathbb{C}^+$ について

$$\mathcal{L}f_n(\tau) = \int_0^{+\infty} e^{-\tau x} x^n dx$$

が成り立つ．$n = 0$ ならば

$$\mathcal{L}f_0(\tau) = \left[-\frac{1}{\tau}e^{-\tau x}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{\tau}$$

が成り立つ．$n > 1$ とすると

$$\begin{aligned}\mathcal{L}f_n(\tau) &= \left[\frac{-1}{\tau}e^{-\tau x}x^n\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{-n}{\tau}e^{-\tau x}x^{n-1}dx \\ &= \frac{n}{\tau}\mathcal{L}f_{n-1}(\tau)\end{aligned}$$

が成り立つので，$\mathcal{L}f_n(\tau) = \dfrac{n!}{\tau^{n+1}}$ が成り立つ．さて，$c > 0$ とする．

$$\mathcal{B}_c(\mathcal{L}f_n)(t) = \lim_{R\to+\infty} \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{c-\sqrt{-1}R}^{c+\sqrt{-1}R} e^{tx}\frac{n!}{x^{n+1}}dx$$

が成り立つ．計算をこれ以上進めるためには留数計算などの複素解析に関する基本的な知識が要るので，ここでは $n \geq 0$ について

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{c-\sqrt{-1}R}^{c+\sqrt{-1}R} \frac{e^x}{x^{n+1}}dx = \frac{2\pi\sqrt{-1}}{n!}$$

が成り立つことを認める（留数を用いて示すのが一つの標準的な方法である）．すると，

$$\mathcal{B}_c(\mathcal{L}f_n)(t) = \lim_{R\to+\infty} \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{tc-\sqrt{-1}tR}^{tc+\sqrt{-1}tR} t^n e^y \frac{n!}{y^{n+1}}dy = t^n$$

が成り立つ．

2) $f\colon [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ を $f(x) = \cos x$ とする．$\tau \in \mathbb{C}^+$ について

$$\begin{aligned}\mathcal{L}f(\tau) &= \int_0^{+\infty} e^{-\tau x}\cos x dx \\ &= \left[e^{-\tau x}\sin x\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} (-\tau)e^{-\tau x}\sin x dx \\ &= -\tau\left[e^{-\tau x}\cos x\right]_0^{+\infty} + \tau\int_0^{+\infty} (-\tau)e^{-\tau x}\cos x dx \\ &= \tau - \tau^2\mathcal{L}f(\tau)\end{aligned}$$

が成り立つから，
$$\mathcal{L}f(\tau) = \frac{\tau}{1+\tau^2}$$
が成り立つ．$c > 0$ とすると
$$\mathcal{B}_c(\mathcal{L}f)(t) = \lim_{R\to+\infty} \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{c-\sqrt{-1}R}^{c+\sqrt{-1}R} e^{tx} \frac{x}{1+x^2} dx$$
が成り立つ．$e^{tx}\dfrac{x}{1+x^2} = \dfrac{1}{2\sqrt{-1}}\left(\dfrac{e^{tx}}{1-\sqrt{-1}x} - \dfrac{e^{tx}}{1+\sqrt{-1}x}\right)$ であることを用いて $x = y - \sqrt{-1}$, $x = z + \sqrt{-1}$ とそれぞれ変数変換して 1) と同様に計算すると
$$\mathcal{B}_c(\mathcal{L}f)(t) = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\left(\frac{e^{-t\sqrt{-1}}}{-\sqrt{-1}} - \frac{e^{t\sqrt{-1}}}{\sqrt{-1}}\right) = \cos t$$
を得る．

微分と積分の交換（積分記号下での微分）について

講義でごく簡単に紹介したが，演習形式でもう少し詳しく述べる．

問 23.21. $K \subset \mathbb{R}^n$ を体積確定なコンパクト集合，$I \subset \mathbb{R}$ を一点ではない区間（開区間，閉区間あるいは半開区間）とする．$f\colon K \times I = \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x \in K,\ t \in I\} \to \mathbb{R}$ を連続とし，
$$F(t) = \int_K f(x,t)dx$$
と置く．このとき次が成り立つ．

1) $F\colon I \to \mathbb{R}$ は連続である．
2) f は t に関して偏微分可能であって，$D_t f = \dfrac{\partial f}{\partial t}$ は $K \times I$ 上で連続であるとする（K 上でも I 上でもないので注意）．このとき，F は I 上で C^1 級であって，
$$DF(t) = \int_K D_t f(x,t)dx$$
が成り立つ（F は t の函数だから $DF = D_t F$ であることに注意）．

このことを示せ（例えば以下に従うと示せるが，必ずしもそうする必要はない）．

1) について．

$a < b$ とし，$[a,b] \subset I$ とする．

問． f は $K \times [a,b]$ 上一様連続であることを示せ．

ヒント：$K \times [a,b]$ は有界閉集合（従ってコンパクト）である．

従って

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,\ (x,t),(y,s)\in K\times[a,b],$$
$$(\|(x,t)-(y,s)\|<\delta\Rightarrow|f(x,t)-f(y,s)|<\varepsilon)$$

が成り立つ．特に $y=x$ とすると，

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,\ x\in K,\ t,s\in[a,b],\ |t-s|<\delta\Rightarrow|f(x,t)-f(x,s)|<\varepsilon$$

が成り立つ．すると，$|t-s|<\delta$ であれば

$$|F(t)-F(s)|\leq\int_K|f(x,t)-f(x,s)|\,dx\leq\int_K\varepsilon dx=\varepsilon v(K)$$

が成り立つ．従って F は $[a,b]$ 上一様連続（特に連続）である（一様連続であることはこの後では用いない）．

問． F は I 上連続であることを示せ．

ヒント：$[a,b]\subset I$ は任意に取れる．

2) について．

1) を D_tf に対して用いる．

$$G(t)=\int_K D_tf(x,t)dx$$

と置くと G は I 上連続である．

問． $a,t\in I$ とすると

$$\int_a^t G(s)ds=F(t)-F(a)$$

が成り立つことを示せ．

ヒント：ここで現れる積分は全て普通の積分（広義積分ではない，有界閉集合（であって体積確定である集合）に関する積分）である．

問．

i) $\displaystyle\int_a^t G(s)ds$ は t について微分可能であって，$D_t\left(\displaystyle\int_a^t G(s)ds\right)=G(t)$ が成り立つことを示せ．

ヒント：微積分学の基本定理を用いると良い．

ii) F も微分可能であって $DF(t)=G(t)=\displaystyle\int_K D_tf(x,t)dx$ が成り立つことを示せ．

定義 23.22. $J=[a,b)$ とし，I を集合とし，$F\colon I\to\mathbb{R}$ とする．$f\colon J\times I\to\mathbb{R}$ について，以下のように定める．

1) $\displaystyle\int_a^{b-0} f(x,t)dx$ が I 上 F に一様収束するとは，

$$\forall\epsilon>0,\exists\delta>0,\ (b-\delta<u<b\Rightarrow\forall t\in I,\ \left|\int_a^u f(x,t)dx-F(t)\right|<\epsilon$$

が成り立つことを言う．

2) $\displaystyle\int_a^{b-0} f(x,t)dx$ が I 上 G に一様に絶対収束するとは，

$$\forall\epsilon>0,\exists\delta>0,\ (b-\delta<u<b\Rightarrow\forall t\in I,\ \left|\int_a^u |f(x,t)|\,dx-G(t)\right|<\epsilon$$

が成り立つことを言う．

問 23.23. $\displaystyle\int_a^{b-0} f(x,t)dx$ が I 上ある函数 G に一様に絶対収束するならば，$\displaystyle\int_a^{b-0} f(x,t)dx$ は I 上ある函数 F に一様収束することを示せ．

あらすじ（無理に従わなくとも良い）．$b<+\infty$ とする．$b=+\infty$ の場合も同様である．$\epsilon>0$ とする．$\delta>0$ が存在して $b-\delta<u<b$ ならば

$$\left|\int_a^u |f(x,t)|\,dx-G(t)\right|<\epsilon$$

が成り立つ．すると，$b-\delta<u\leq v<b$ ならば

$$\begin{aligned}\int_u^v |f(x,t)|\,dx&=\int_a^v |f(x,t)|\,dx-\int_a^u |f(x,t)|\,dx\\&=\left|\int_a^u |f(x,t)|\,dx-\int_a^v |f(x,t)|\,dx\right|\\&=\left|\left(\int_a^u |f(x,t)|\,dx-G(t)\right)-\left(\int_a^v |f(x,t)|\,dx-G(t)\right)\right|\\&<2\epsilon\end{aligned}$$

が成り立つので，

$$\begin{aligned}\left|\int_a^u f(x,t)dx-\int_a^v f(x,t)dx\right|&=\left|\int_u^v f(x,t)dx\right|\\&\leq\int_u^v |f(x,t)|\,dx\\&<2\epsilon\end{aligned}$$

が成り立つ．従って $\displaystyle\left\{\int_a^u f(x,t)dx\right\}_{u\in U}$ は I 上一様コーシー列なので，ある函数に I 上一様収束する． □

問 23.24. $J=[a,b)$ とし，I を集合とする．$f\colon J\times I\to\mathbb{R}$ について，J 上の函数 $M\colon J\to\mathbb{R}$ が存在して次が成り立つとする．即ち，

1) $\forall(x,t)\in J\times I,\ |f(x,t)|\leq M(x)$.
2) 広義積分 $\displaystyle\int_a^{b-0} M(x)dx$ は収束する．

このとき，広義積分 $\displaystyle\int_a^{b-0} f(x,t)dx$ は I 上一様に絶対収束することを（例えば以下に従って）示せ．

<u>$b<+\infty$ の場合の証明の大筋.</u> （$b=+\infty$ の場合も同様である.）

$u\in J$ について $F_u(t)=\displaystyle\int_a^u f(x,t)dx,\ G_u(t)=\int_a^u |f(x,t)|\,dx$ と置く．すると，

$$|F_u(t)-F_v(t)|=\left|\int_u^v f(x,t)dx\right|,$$
$$|G_u(t)-G_v(t)|=\left|\int_u^v |f(x,t)|\,dx\right|$$

がそれぞれ成り立つ．仮定により $t\in I$ によらず

$$|F_u(t)-F_v(t)|\leq|G_u(t)-G_v(t)|\leq\left|\int_u^v M(x)dx\right|$$

が成り立つ．さて，$\epsilon>0$ とする．$\delta>0$ が存在して

$$b-u<\delta,\ b-v<\delta\Rightarrow\left|\int_u^v M(x)dx\right|<\epsilon$$

が成り立つ．従って，$b-u<\delta,\ b-v<\delta$ が成り立つならば，$t\in I$ によらず

$$|F_u(t)-F_v(t)|\leq|G_u(t)-G_v(t)|\leq\left|\int_u^v M(x)dx\right|<\epsilon$$

が成り立つ．従って $(F_u(t))_{u\in J}$ と $(G_u(t))_{u\in J}$ はいずれも一様コーシー列であるので，$F(t)=\displaystyle\lim_{u\nearrow b}F_u(t)$ および $G(t)=\displaystyle\lim_{u\nearrow b}G_u(t)$ が存在し，これらの収束は一様である（必要に応じて次の補題（後日講義で扱う）を用いよ）． □

補題 23.25. $U\subset\mathbb{R}^n$ とし，$T\subset\mathbb{R}$ を上あるいは下に閉じていないとする．各 $t\in T$ について $f_t\colon U\to\mathbb{R}$ が与えられているとき，次は同値である．

1) T は上に非有界とする．
   a) $t\in T,\ t\to+\infty$ の時 $(f_t)_{t\in T}$ はある $f\colon U\to\mathbb{R}$ に U 上一様収束する．

b)

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists t_0 > 0,\ (t, s > t_0 \Rightarrow \sup_{x \in U} |f_t(x) - f_s(x)| < \epsilon)$$

が成り立つ（$\{f_t\}$ は**一様コーシー条件**を満たす，あるいは**一様コーシー列**であると言う）．

2) a') $t \in T,\ t \to 0$ の時 $(f_t)_{t \in T}$ はある $f\colon U \to \mathbb{R}$ に U 上一様収束する．

b')

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ (|t| < \delta, |s| < \delta \Rightarrow \sup_{x \in U} |f_t(x) - f_s(x)| < \epsilon)$$

が成り立つ．

問 23.26. $J = [a, b)$ とし，$I \subset \mathbb{R}$ を区間とする．連続函数 $f\colon J \times I \to \mathbb{R}$ について広義積分

$$F(t) = \int_a^{b-0} f(x, t)dx$$

が I 上広義一様収束するならば，次が成り立つことを以下に従って示せ．

i) F は I 上連続である．

ii) $[c, d] \subset J$ とすると

$$\begin{aligned}\int_c^d F(t)dt &= \int_c^d \left(\int_a^{b-0} f(x, t)dx\right) dt \\ &= \int_a^{b-0} \left(\int_c^d f(x, t)dt\right) dx\end{aligned}$$

が成り立つ．

1) $x \in J = [a, b)$ とし，$F_x(t) = \displaystyle\int_a^x f(y, t)dy$ と置く．問 23.21 の結果を用いて F_x は I 上連続であることを示せ．また，$(F_x)_{x \in J}$ は $x \to b - 0$ で F に広義一様収束することを用いて F は連続であることを示せ．

2) a) $x \in [a, b)$ とすると

$$\begin{aligned}\int_c^d F_x(t)dt &= \int_c^d \left(\int_a^x f(y, t)dy\right) dt \\ &= \int_a^x \left(\int_c^d f(y, t)dt\right) dy\end{aligned}$$

が成り立つことを示せ（講義で扱った定理のいずれかに当てはまるはずである．そのことを確認すれば良い）．

b) $(F_x)_{x\in J}$ の F への収束は $[c,d]$ 上一様であることを用いて

$$\int_c^d F(t)dt = \int_a^{b-0}\left(\int_c^d f(x,t)dt\right)dx$$

が成り立つことを示せ.

問 23.27. $J=[a,b)$ とし，$I\subset\mathbb{R}$ を区間とする．連続函数 $f\colon J\times I\to\mathbb{R}$ が以下の条件をみたすとする．即ち，

i) 各 $t\in I$ について $x\mapsto f(x,t)$ は J 上広義可積分である（そこで $F(t)=\displaystyle\int_a^{b-0} f(x,t)dx$ と置く）.

ii) $D_t f$ が $J\times I$ 上存在し，連続である.

iii) $G(t)=\displaystyle\int_a^{b-0} D_t f(x,t)dx$ とすると，右辺の積分は I 上広義一様収束する.

このとき F は I 上 C^1 級であって

$$DF(t)=G(t)=\int_a^{b-0} D_t f(x,t)dx$$

が成り立つことを以下に従って示せ.

1) G は連続であることを示せ.

2) $[c,d]\subset I$ とする．問 23.26 を $D_t f$ について用いて

$$\int_c^d G(t)dt = F(d)-F(c)$$

が成り立つことを示せ.

3) d を変数と考えて $DF(t)=G(t)=\displaystyle\int_a^{b-0} D_t f(x,t)dx$ が成り立つことを示せ.

（以上）