

2017年度微分積分学（理I 24-27組向け，足助担当）演習問題 21 v4 '17/11/20（月）

'17/11/16：初版.

'17/11/17：問 21.10 以降（Laplace 変換）は後日改めて出題することとして一旦削除.

'17/12/10：問 21.9 の 5) が曖昧だったので修正.

'17/12/11：問 21.6 と 21.7 の誤植（問の引用）を修正.

**問 21.1** (杉浦光夫他「解析演習」より一部改題).  $\mathbb{R}^2$  の部分集合  $D$  を

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \exists t, s \in \mathbb{R}, t \geq 0, s \geq 0, t + s \leq 1, (x, y) = t(\pi, 0) + s(\pi, \pi)\}$$

により定める.

1)  $D$  を図示せよ.

2)  $\int_D \frac{y \sin x}{x} dx dy$  を累次積分（逐次積分）により二通りに表せ.

3)  $\int_D \frac{y \sin x}{x} dx dy$  を求めよ.

**問 21.2.** 1)  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$  とし,  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  を可積分な函数とする（解答に困難を感じる場合にはとりあえず連続として良い）. このとき,  $f$  は  $(a, b)$  上広義積分可能であって,  $\int_{(a,b)} f(x) dx = \int_{[a,b]} f(x) dx$  が成り立つことを示せ. また,  $(a, b)$  を  $(a, b]$  あるいは  $[a, b)$  としても同様のことが成り立つことを示せ.

2)  $-\infty < a < b \leq +\infty$  とし,  $f: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  を連続な, 広義可積分な函数とする. このとき,  $f$  は  $(a, b)$  上広義可積分であって  $\int_{(a,b)} f(x) dx = \int_{[a,b)} f(x) dx$  が成り立つことを示せ. また,  $[a, b)$  を  $(a, b]$  としても同様のことが成り立つことを示せ.

**問 21.3.**  $-\infty < a < b \leq \infty$  とし,  $f, g: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  を連続函数とする. また,  $f, g$  は  $[a, b)$  上広義可積分であるとする. このとき, 任意の  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  について  $\lambda f + \mu g$  も  $[a, b)$  上広義可積分であって,

$$\int_{[a,b)} (\lambda f + \mu g)(x) dx = \lambda \int_{[a,b)} f(x) dx + \mu \int_{[a,b)} g(x) dx$$

が成り立つことを示せ. また,  $(a, b)$  を  $(a, b]$  あるいは  $[a, b)$  としても同様のことが成り立つことを示せ.

問 21.4.  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$  とし,  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  を連続とする.  $\varepsilon > 0$  が与えられたとすると,  $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$  をみたす  $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  と,  $t_0, \dots, t_{n-1} \in \mathbb{R}$  が存在して,  $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  を  $g(x) = \begin{cases} t_i, & a_i \leq x < a_{i+1}, \\ t_{n-1}, & x = a_n \end{cases}$  (最後は  $t_n$  の誤りではない) により定めると,  $\sup_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)| < \varepsilon$  が成り立つことを示せ.

問 21.5.  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$  とし,  $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  を連続とする (ただし  $n \in \mathbb{N}$ ). また, 函数  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  について  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)| = 0$  が成り立つとする.

1)  $f$  は連続であることを示せ.

2) 1) により  $f$  は  $[a, b]$  上可積分である. 積分について,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$  が成り立つことを示せ.

問 21.6 (リーマン・ルベグの定理).  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a \leq b$  とし,  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  を連続とする. このとき  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) \sin(\lambda x) dx = 0$  が成り立つことを示せ.  
ヒント: 問 21.4 と 21.5 を用いても良いし, 直接示しても良い. ただ, 直接示そうとしても (普通に証明すると) これらを用いたのと大差無いと思われる.

問 21.7.  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$  を求める (被積分函数は  $x = 0$  まで連続に拡張されるから, 問 21.2 により 0 での振る舞いはあまり気にしなくて良いことに注意せよ).

1)  $g: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  を  $g(t) = \begin{cases} \frac{2}{x} - \frac{1}{\sin \frac{x}{2}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$  により定める.  $g$  は連続であることを示せ.

2)  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\frac{(2n+1)\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx$  であるが, このことと, リーマン・ルベグの定理 (問 21.6) を用いて  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \frac{\sin \frac{2n+1}{2} t}{2 \sin \frac{1}{2} t} dt$  が成り立つことを示せ.

3)  $\int_0^\pi \frac{\sin \frac{2n+1}{2} t}{2 \sin \frac{1}{2} t} dt$  と  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \frac{\sin \frac{2n+1}{2} t}{2 \sin \frac{1}{2} t} dt$  を求めよ.

4\*\*) ※ 留数 (residue) についての知識が必要なので, 現時点では「ちんぷんかんぷん」で構わない<sup>†1</sup>. なお, 理学部よりも工学部 (の一定の学科) に進学する方が目にするのが早いと思われる.

$x$  は複素数でも良いと考えることにして  $z$  で表すことにし, 函数  $f(z) = \frac{e^{\sqrt{-1}z}}{z}$  を考える.  $f$  は  $z = 0$  以外では正則 (複素解析的) な函数であって,  $z = 0$  は一位の極 (pole) である.  $\delta, R_1, R_2 > 0, 0 < \delta < \min\{R_1, R_2\}$  とし,  $\gamma_{\delta, R_1, R_2}$  を次のような積分路とする. まず  $R_1, R_1 + \sqrt{-1}R_2, -R_1 + \sqrt{-1}R_2, -R_1$  を頂点とする長方形を考え, 反時計回りの向きを入れる. この長方形から  $-\delta$  と  $\delta$  を結ぶ線分を取り去り, 代わりに, 原点を中心とする半径  $\delta$  の円周の下半分を考えてこれをつなぐ. 向きは全体として反時計回りになるように自然に入れ, これを  $\gamma_{\delta, R_1, R_2}$  とする.

4a)  $\lim_{\substack{\delta \searrow 0 \\ R_1 \rightarrow +\infty \\ R_2 \rightarrow +\infty}} \int_{\gamma_{\delta, R_1, R_2}} f(z) dz$  を求めよ. いかにも極限は簡単にとれるように書いてあるが, 重極限 (三重極限) なのでどのように取るか考える必要が (どのように取ってもよいことを示す必要が) ある.

4b) 積分路  $\gamma_{\delta, R_1, R_2}$  は自然に六分割される. それぞれの部分での積分の極限での振る舞いについて考察して  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$  を求めよ (ここでは 4a) の積分のうち虚部しか必要にならないが, 実部にもきちんと意味をつけることができ, Cauchy の主値と呼ばれる).

**定義 21.8** (複素線積分). ここでは  $z \in \mathbb{C}$  を  $x + \sqrt{-1}y, x, y \in \mathbb{R}$  と表すことにより  $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$  とみなす.  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  を複素数値の函数とし, 実部と虚部に分けて  $f = u + \sqrt{-1}v$  と表す.  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  を  $C^1$  級の曲線とし, やはり実部と虚部に分けて  $\gamma = \alpha + \sqrt{-1}\beta$  とする. こ

<sup>†1</sup>すぐに解ければ (一変数複素解析的函数の) 留数についてある程度理解できていると考えて良い. なお,  $S^1$  に正の向きを入れると  $\int_{S^1} \frac{dz}{z} = 2\pi\sqrt{-1}$  が成り立つ. これは留数定理の一番簡単な場合であって, このことを用いて例えば代数学の基本定理を証明することができる (問 21.9). 複素解析に関する入門書としては複素解析, L.V. アールフォルス著, 笠原乾吉訳と, 複素函数論, H. カルタン著, 高橋礼司訳を挙げておく.

の時,

$$\begin{aligned} & \int_{\gamma} f(z) dz \\ &= \int_a^b f \circ \gamma(t) \frac{d\gamma}{dt}(t) dt \\ &= \int_a^b \left( u \circ \gamma(t) \frac{d\alpha}{dt}(t) - v \circ \gamma(t) \frac{d\beta}{dt}(t) \right) dt \\ & \quad + \sqrt{-1} \int_a^b \left( u \circ \gamma(t) \frac{d\beta}{dt}(t) + v \circ \gamma(t) \frac{d\alpha}{dt}(t) \right) dt \end{aligned}$$

と定め、 $\gamma$ に沿った  $f$  の (複素線) 積分と呼ぶ。

問 21.9.  $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$  とみなし、 $z \in \mathbb{C}$  とする。

1)  $\gamma(t) = e^{\sqrt{-1}t} = \cos t + \sqrt{-1} \sin t$ ,  $t \in [0, 2\pi]$  とする。  $\int_{\gamma} z^n dz$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  を求めよ。

2)  $f$  を  $z$  の多項式とする。このとき、 $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$  が成り立つことを示せ。

※ これは Cauchy の積分定理の特別な場合である。なお、Green の定理とも関連する。

3)  $\int_{\gamma} e^z dz = \int_{\gamma} e^x (\cos y + \sqrt{-1} \sin y) dz = 0$  が成り立つことを示せ。ただし、 $z = x + \sqrt{-1}y$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$  とする。

※ これも Cauchy の積分定理の特別な場合である。

4)  $\int_{\gamma} \bar{z}^n dz$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  を求めよ。ここで  $\bar{z}$  は  $z$  の複素共軛とする。

5\*\*)  $\gamma_R(t) = Re^{\sqrt{-1}t}$  とする。

a)  $R > 0$  を十分大きく取れば  $\forall t \in \mathbb{R}$ ,  $f \circ \gamma_R(t) \neq 0$  が成り立つことを示せ。

b)  $R > 0$  を十分大きく取る。  $f$  を  $z$  に関する  $n$  次多項式とすると  $\int_{\gamma_R} \frac{1}{f(z)} \frac{df}{dz}(z) dz = n$  が成り立つことを示せ。

c) b) を用いて代数学の基本定理を示せ。

(以上)