２０１７年度微分積分学（理 I 24–27 組向け，足助担当）演習問題 １９ v1　’17/11/6（月）

問 19.1 (全て解析演習（杉浦他著）からの引用). 以下の函数のそれぞれについて原始函数を積分記号を含まない形で表せ.

1) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+2px+q}}$，ただし $p, q \in \mathbb{R}$.

2) $\dfrac{\cot x}{\log|\sin x|}$.

3) $e^{ax}\cos bx$，ただし $a, b \in \mathbb{R}$.

4) $\dfrac{x}{x^4-1}$.

5) $\dfrac{2x-5}{(x+3)(x+1)^2}$.

6) $\dfrac{x^7}{x^{12}-1}$.

7) $\dfrac{\sin x}{1+\sin x}$.

8) $\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}$.

9) $\operatorname{Arctan} x$.

10) $\dfrac{1+x^2}{1-x^2}\dfrac{1}{\sqrt{1+x+x^2}}$.

ただし，9) において $\operatorname{Arctan} x$ で $\tan^{-1} 0 = 0$ をみたす $\tan^{-1} x$ の分枝を表す.

※ 具体的な計算は各自で練習しておくこと．参考書を幾つかウェブのページで挙げておいた.

問 19.2. 1) $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0,1],\ x \leq y \leq 1\}$ とする．$\displaystyle\int_K dxdy$ を求めよ.

2) $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [-1,1],\ 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}$ とする．$\displaystyle\int_K dxdy$ を求めよ.

3) $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1,\ 4x^2+9y^2 \geq 1\}$ とする．$\displaystyle\int_K dxdy$ を求めよ.

4) $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1,\ 4x^2+9y^2 \geq 1\}$ とする．$\displaystyle\int_K (x+y)dxdy$ を求めよ.

5) $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0,\pi/4],\ 0 \leq y \leq \tan x\} \subset [0,1]^2$ とする.

$$\int_{[0,1]^2} \chi_K(x,y)dxdy = \int_K dxdy,$$

$$\int_0^1 dy \int_0^1 \chi_K(x,y)dx,$$

$$\int_0^1 dx \int_0^1 \chi_K(x,y)dy$$

をそれぞれ求めよ.

問 19.3. $V = \{f\colon [-1,1] \to \mathbb{R} \mid f$ は連続 $\}$ とする．V は $\mathbb{R}$-線型空間である（各自で示すこと）．$f, g \in V$ について

$$\langle f \mid g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$$

と置く．以下の問に答えよ．なお，講義で扱っていない用語は線型空間に関するものである．いずれも初歩的なものなので定義を知らなければ調べること．

1) $\langle \cdot | \cdot \rangle$ は V の内積を定めることを示せ．
2) 正の整数 n について，$P_n(x) = \dfrac{1}{2^n n!}\sqrt{\dfrac{2n+1}{2}}\dfrac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$ と置く．$\{P_n\}_{n=1,2,\ldots}$ は $\langle \cdot | \cdot \rangle$ に関して正規直交系をなす事を示せ．
3) $\{P_n\}_{n=1,2,\ldots}$ は V の正規直交基底であるか，理由と共に述べよ．

問 19.4. $r > 0$ とし，$S^n(r) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ を $S^n(r) = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = r\}$ により定める．$S^n(r)$ は $\mathbb{R}^{n+1}$ の，区分的に C^1 級の超曲面であることを示せ．

問 19.5 ***.** $X \subset \mathbb{R}^n$ を体積確定集合とすると，X 上の連続函数は可積分であることを示せ．

問 19.6. $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ を区分的に C^1 級の超曲面とし，閉区間の直積 P に含まれるとする（問 19.8 も参照のこと）．$\chi_\Sigma\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を

$$\chi_\Sigma(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Sigma, \\ 0, & x \notin \Sigma \end{cases}$$

により定める．と $\displaystyle\int_P \chi_\Sigma(x)dx = 0$ が成り立つことを示せ．即ち，$\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ は体積確定集合であって，その体積は 0 に等しい．

問 19.5 は，Σ は n 次元の図形としては体積が 0 であるということを示しているが，$n-1$ 次元の図形としての体積がどうであるかについてはなにも主張していない．

問 19.7. $f\colon [0,1]^{n-1} \to \mathbb{R}$ を C^1 級とし，$g\colon [0,1]^{n-1} \to \mathbb{R}^n$ を $g(t) = (t, f(t))$ により定める．$\Sigma = g([0,1]^{n-1})$ とすると，Σ は超曲面片であることを示せ．

Σ の $n-1$ 次元の図形としての面積は $\displaystyle\int_{[0,1]^{n-1}} \sqrt{1 + \|Df(t)\|^2}dt$ で与えられることが示せる（現時点ではやや難しい）．

問 19.8. $g\colon [0,1]^2 \to \mathbb{R}^3$ を $g(x,y) = (x, y, \sqrt{1-x^2})$ により定める．$\Sigma = g([0,1]^2)$ として，Σ の（2 次元の図形としての）面積を求めよ．

問 19.9. 1) $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ を超曲面片とすると，Σ は有界閉集合であることを示せ．

ヒント：$x \in \Sigma$ について $\|x\|$ が有界であれば Σ は有界である．Σ が $f\colon [0,1]^{n-1} \to \mathbb{R}^n$ により定義されているとして，$\|f\|: [0,1]^{n-1} \to \mathbb{R}$ を考えてみよ．また，Σ が閉集合であることは $(p_n) \subset \Sigma$ について $p = \lim_{n\to+\infty} p_n \in \mathbb{R}^n$ とすると（(p_n) が収束するかどうかは自明ではないが，p に収束すると仮定する）$p \in \Sigma$ が成り立つことと同値である（やや難しいので必要なら認めて良い）．$p_n = f(q_n)$, $q_n \in [0,1]^{n-1}$ と表して，(q_n) について考えてみよ．

2) $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ を区分的に C^1 級の超曲面とすると，Σ は有界閉集合であることを示せ．

体積確定集合上の積分について．

講義では主に体積確定な有界閉集合上の積分について述べた．しかし，例えば定理 5.4.13 のように，閉集合である（直感的に言えば，端が全て含まれているような図形）という仮定は必ずしも必要でない．ここでは有界な体積確定集合（で，必ずしも閉集合とは限らないもの）について少し補足する．

定義 19.10. $X \subset \mathbb{R}^n$ とする．$B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y - x\| < r\}$ とする．

$$\mathring{X} = X^\circ = \{x \in X \mid \exists r > 0,\ B_r(x) \subset X\}$$

と定め，X の**内部**と呼ぶ．X の内部を $\operatorname{Int} X$ などで表すこともある．また，

$$\partial X = \mathbb{R}^n \setminus ((\mathbb{R}^n \setminus X)^\circ \cup \mathring{X})$$

と置いて，X の**境界**と呼ぶ．X の境界を $\operatorname{bd} X$ や $\operatorname{fr} X$ などで表すこともある．

定理 5.4.13 は次から従う．

定理 19.11. $X \subset \mathbb{R}^n$ を有界とする．この時以下は同値である．

a) X は体積確定である．

b) ∂X は体積確定であって，その体積は 0 に等しい．

また，X が体積確定であるとし，$f\colon X \to \mathbb{R}$ は有界とする．また，$f|_{\mathring{X}}$ は連続とする．このとき，f は X 上可積分である．また，$g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ が

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in \mathring{X}, \\ 0, & x \in (\mathbb{R}^n \setminus X)^\circ \end{cases}$$

を満たすならば，X を含む閉区間の直積 P 上 g は可積分であって

$$\int_P g(x)dx = \int_P f^*(x)dx \left(= \int_X f(x)dx \right)$$

が成り立つ．

証明. まず後半を示す．さしあたり X が体積確定であることは仮定せず，単に $f\colon X \to \mathbb{R}$ は有界であって，$f|_{\overset{\circ}{X}}$ は連続とする．Δ を P の分割とし，

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_1 &= \{I \in \mathcal{I}(\Delta) \mid I \subset \overset{\circ}{X}\}, \\
\mathcal{I}_2 &= \{I \in \mathcal{I}(\Delta) \mid I \cap \partial X \neq \varnothing\}, \\
\mathcal{I}_3 &= \{I \in \mathcal{I}(\Delta) \mid I \subset (\mathbb{R}^n \setminus X)^\circ\}
\end{aligned}$$

と置く．$\mathcal{I}(\Delta) = \mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2 \cup \mathcal{I}_3$ であって，また，$i \neq j$ ならば $\mathcal{I}_i \cap \mathcal{I}_j = \varnothing$ が成り立つ．$I \in \mathcal{I}(\Delta)$ について，$M_I = \sup_{x \in I} g(x)$, $m_I = \inf_{x \in I} g(x)$ と置く．すると，

$$\begin{aligned}
\overline{s}(g; \Delta) &= \sum_{I \in \mathcal{I}_1} M_I v(I) + \sum_{I \in \mathcal{I}_2} M_I v(I) + \sum_{I \in \mathcal{I}_3} M_I v(I), \\
\underline{s}(g; \Delta) &= \sum_{I \in \mathcal{I}_1} m_I v(I) + \sum_{I \in \mathcal{I}_2} m_I v(I) + \sum_{I \in \mathcal{I}_3} m_I v(I)
\end{aligned}$$

が成り立つ．$I \in \mathcal{I}_3$ について $M_I = m_I = 0$ が成り立つので，

$$\overline{s}(g; \Delta) - \underline{s}(g; \Delta) = \sum_{I \in \mathcal{I}_1} (M_I - m_I) v(I) + \sum_{I \in \mathcal{I}_2} (M_I - m_I) v(I)$$

が成り立つ．ここで X は体積確定だとする．すると χ_X は可積分である．従って $\delta(\Delta) \to 0$ の時 $\overline{s}(\chi_X; \Delta) - \underline{s}(\chi_X; \Delta) \to 0$ が成り立つ．一方，

$$\overline{s}(\chi_X; \Delta) - \underline{s}(\chi_X; \Delta) = \sum_{I \in \mathcal{I}_2} v(I)$$

が成り立つ．さて，$\epsilon > 0$ が与えられたとする．$M = \sup_{x \in X} f(x)$ と置く．$\delta > 0$ を，P の分割 Δ が $\delta(\Delta) < \delta$ ならば，

$$\sum_{I \in \mathcal{I}_2} v(I) = \overline{s}(\chi_X; \Delta) - \underline{s}(\chi_X; \Delta) < \frac{\epsilon}{2M}$$

かつ，$I \in \mathcal{I}_1$ について

$$x, x' \in I \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \frac{\epsilon}{2v(X)}$$

が成り立つように選ぶ．すると，$I \in \mathcal{I}_1$ について $M_I - m_I \leq \dfrac{\epsilon}{2v(X)}$ が成り立つので，

$$\begin{aligned} \overline{s}(g;\Delta) - \underline{s}(g;\Delta) &< \sum_{I \in \mathcal{I}_1} \frac{\epsilon}{2v(X)} v(I) + M \sum_{I \in \mathcal{I}_2} v(I) \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \\ &= \epsilon \end{aligned}$$

が成り立つ．よって g，特に f^* は P 上可積分なので f は X 上可積分である．

次に前半のうち，b) $\Rightarrow$ a) を示す．∂X は体積確定で，その体積は 0 だとする．上の議論で $g = (\chi_X)^*$ とする．$v(\partial X) = 0$ であることから，$\delta(\Delta) \to 0$ のとき，$\displaystyle\sum_{I \in \mathcal{I}_2} v(I) \to 0$ が成り立つ．すると，上と同様の議論により $\delta(\Delta) \to 0$ のとき，

$$\overline{s}(g;\Delta) - \underline{s}(g;\Delta) \to 0$$

が成り立つので，χ_X は可積分であって，X は体積確定である．最後に，前半の a) $\Rightarrow$ b) を示す．X が体積確定だとする．$g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x \in \partial X, \\ 0, & x \notin \partial X \end{cases}$$

により定めると，$g = \chi_{\partial X}$ である．g は $\mathring{X}$ 上恒等的に 0 であるから，連続である．よって X 上可積分である．一方，$f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を $f(x) = 0$ により定める．f も X 上可積分である．$\mathring{X}$ 上 $g = f$ だから，P を X を含む，閉区間の直積とすると

$$v(\partial X) = \int_P g(x)dx = \int_P f^*(x)dx = \int_P 0dx = 0$$

が成り立つ． $\square$

（以上）