２０１７年度微分積分学（理 I 24–27 組向け，足助担当）演習問題 １７ v3 '17/10/23（月）
'17/11/6 v2：問 17.12 の誤植を修正．
'17/12/17 v3：問 17.10 に加筆．問 17.12 を修正．問 17.14 を追加．

問 17.1. P を閉区間の直積とし，$f\colon P \to \mathbb{R}$ を可積分函数とする．$f^+, f^-\colon P \to \mathbb{R}$ を

$$\begin{aligned} f^+(x) &= \max\{f(x), 0\}, \\ f^-(x) &= -\min\{f(x), 0\}(= \max\{-f(x), 0\}) \end{aligned}$$

により定めると，f^+, f^- は共に可積分であって

$$-\int_P f^-(x)dx \leq \int_P f(x)dx \leq \int_P f^+(x)dx$$

が成り立つのであった．ここで f は連続だとする（従って P 上可積分である）．このとき，それぞれの不等号について，等号が成り立つための条件を求めよ．

問 17.2. P を閉区間の直積とし，$f, g\colon P \to \mathbb{R}$ を可積分函数とする．$\max\{f, g\}, \min\{f, g\}\colon P \to \mathbb{R}$ を

$$\begin{aligned} \max\{f, g\}(x) &= \max\{f(x), g(x)\}, \\ \min\{f, g\}(x) &= \min\{f(x), g(x)\} \end{aligned}$$

により定めると，$\max\{f, g\}, \min\{f, g\}$ は共に可積分であって

$$\begin{aligned} \int_P \min\{f, g\}(x)dx &\leq \min\left\{\int_P f(x)dx, \int_P g(x)dx\right\} \\ &\leq \max\left\{\int_P f(x)dx, \int_P g(x)dx\right\} \\ &\leq \int_P \max\{f, g\}(x)dx \end{aligned}$$

が成り立つ事を示せ．

問 17.3. 次の不定積分を求めよ．ただし $a, b, c, d \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{N}^+$ とする．

1) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-a)^k}$.
2) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+b^2)^k}$.

3) $\displaystyle\int \frac{xdx}{(x^2+b^2)^k}$.

4) $\displaystyle\int \frac{cx+d}{((x-a)^2+b^2)^k}dx$.

問 17.4. h を多項式，$c_{i,j} \in \mathbb{R},\ 1 \le i \le r,\ 1 \le j < k_i,\ d_{i,j}, e_{i,j} \in \mathbb{R},\ 1 \le i \le s,\ 1 \le j \le l_s$ とする．

$$f(x) = h(x) + \sum_{\substack{1 \le i \le r \\ 1 \le j \le k_i}} \frac{c_{i,j}}{(x-a_i)^j} + \sum_{\substack{1 \le i \le s \\ 1 \le j < l_s}} \frac{d_{i,j}x + e_{i,j}}{((x-a_i)^2 + b_i^2)^j}$$

とするとき，$\displaystyle\int f(x)dx$ を求めよ．

※ 結果を覚える必要はない．

定義 17.5 (曲線とその長さ)**.** $I = [a,b],\ f\colon I \to \mathbb{R}^n$ を C^r 級とする．

1) $f\colon I \to \mathbb{R}^n$ を図形的に考えて C^r 級の**曲線**とも呼ぶ．特に $n=2$ の場合，f を**平面曲線**と呼ぶことがある．f による I の像 $f(I)$ を曲線と呼ぶこともある．

2) $t \in I$ について，$Df(t)$ を t における，あるいは $f(t)$ における f の**速度ベクトル**と呼ぶ．

   ※ f が単射でない場合，$f(t)$ における速度ベクトル，というのはやや曖昧な言い方になってしまう．これは後で定める法線ベクトルについても同様である．

3) $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ を C^1 級の曲線とする．

$$l(f) = \int_a^b \sqrt{Df(t)^2}\, dt = \int_a^b \|Df(t)\|\, dt$$

   と置いて，$l(f)$ を f の**長さ**と呼ぶ．ここで $\|\cdot\|$ は $\mathbb{R}^n$ の標準的なノルムとする．

以下では曲線は常に C^1 級とする．

問 17.6. 以下のように曲線を定める．それぞれの長さを求めよ．

1) $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}^2$ を $f(t) = (\cos \pi t, \sin \pi t)$ により定める．
2) $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}^2$ を $f(t) = (t, \sqrt{1-t^2})$ により定める．
3) $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}^2$ を $f(t) = (t, \cosh t) = \left(t, \dfrac{e^t + e^{-t}}{2}\right)$ により定める．
4) $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}^2$ を $f(t) = (t, t^2)$ により定める．

   ※ 具体的な値を求めるのが困難であることが実感できればよい．

問 17.7. $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ を C^∞ 級とする．曲線 $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ を $g(t) = (t, f(t))$ により定める（グラフを考える）．このとき，

$$l(g) = \int_a^b \sqrt{1 + Df(t)^2}dt$$

が成り立つことを示せ.

問 17.8. $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ を曲線とする．

1) $l(f)(t) = \displaystyle\int_a^t \sqrt{Df(t)^2}\, dt$ とすると，$l(f)\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ は単調増加であることを示せ．また，$\forall t \in [a,b],\ Df(t) \neq 0$ が成り立つとする（このような曲線を**正則な曲線**と呼ぶ）と，$l(f)$ は狭義単調増加であることを示せ.
2) $l(f)$ は C^1 級であって，$D(l(f))(t) = \sqrt{Df(t)^2}$ が成り立つことを示せ.

問 17.9. $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ を正則な曲線とする．

1) このとき，$\alpha = l(f)(a),\ \beta = l(f)(b)$ と置くと，$\alpha = 0$，$\beta > 0$ であって，$l(f)\colon [a,b] \to [0,\beta]$ は C^1 級の逆函数 $\varphi\colon [0,\beta] \to [a,b]$ を持つことを示せ.
2) φ を 1) のように定め，$g = f \circ \varphi$ と定める．$\|Dg(s)\| = 1$ が成り立つことを示せ．g を f の**弧長パラメータ表示**と呼ぶ.

問 17.10. 次の曲線の弧長パラメーター表示を求めよ.

1) $f(t) = (t, \cosh t),\ t \in \mathbb{R}$.
2) $f(t) = (t, t^2),\ t \in \mathbb{R}$.
   ※ 具体的には求まらないことを確認せよ.
3) $f(t) = (t, \sqrt{1-t^2})$，ただし $t \in [-1,1]$.

定義 17.11. $\mathbb{R}^2$ にユークリッド内積（計量）を入れる（多くの場合には標準的なユークリッド内積を考える）．$f\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ を曲線（平面曲線）とする．$Df(t) \neq 0$ の時，$Df(t)$ に直交するベクトルを t における，あるいは $f(t)$ における f の**法線ベクトル**と呼ぶ．$\mathbb{R}^2$ に標準的なユークリッド内積が入っている場合，$Df(t) = (a,b)$ について，法線ベクトルとして $(-b,a)$ を考えることが多い.

問 17.12. $a > 0$ とし，$f\colon [-a, a] \to \mathbb{R}^2$ を C^r 級，ただし $r \geq 1$，の正則な曲線とする（取り敢えず $r = \infty$ としてよい）．f を列ベクトルを用いて ${}^t(f_1, f_2)$ と表す（従って $Df(t) = {}^t(Df_1(t), Df_2(t))$ が成り立つ）．そして $\nu(t) = {}^t(-Df_2(t), Df_1(t)) = {}^t(\nu_1(t), \nu_2(t))$ と定める．

1) f が C^r 級ならば Df, ν は C^{r-1} 級であることを示せ．
2) $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ を $g(y) = \displaystyle\int_0^y \nu(t)dt = {}^t\!\left(\int_0^y \nu_1(t)dt, \int_0^y \nu_2(t)dt\right)$ により定め，$F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を $F(x, y) = f(x) + g(y)$ により定める．$DF(x, y) = (Df(x)\ Dg(y)) \in M_2(\mathbb{R})$ が成り立ち，また，$DF(0, 0)$ は正則であることを示せ．
3) F を 2) のように定める．$(0, 0)$ を中心とする開円板 D が存在して，$F|_D\colon D \to F(D)$ は C^r 級の微分同相写像であることを示せ．
ヒント：逆函数定理あるいは陰函数定理を用いよ．

問 17.12 の記号をそのまま用いる．

問 17.13. $f\colon [-1, 1] \to \mathbb{R}^2$ を $f(t) = (\cos \pi t, \sin \pi t)$ により定める．

1) $\nu\colon [-1, 1] \to \mathbb{R}^2$ を求めよ．
2) F を求め，D をなるべく（包含関係に関して）大きく選べ．

問 17.14 ****.** $a > 0$ とし，$f\colon (-a, a) \to \mathbb{R}^2$ を C^r 級，ただし $r \geq 2$，の正則な曲線とする（取り敢えず $r = \infty$ としてよい）．また，$0 < a' < a$ とする．さて，$f = {}^t(f_1, f_2)$ と表し，$\mu(s, t) = {}^t(-Df_2(s + t), Df_1(s + t))$ と定める．$\mu(s, t) = {}^t(\mu_1(s, t), \mu_2(s, t))$ と表して，$G\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を

$$G(x, y) = f(x) + \int_0^y \mu(x, t)dt = f(x) + {}^t\!\left(\int_0^y \mu_1(x, t)dt, \int_0^y \mu_2(x, t)dt\right)$$

により定める．

1) G は C^r 級であることを示せ（良くわからない場合はとりあえず C^1 級であることを示せ）．
2) $x \in (-a, a)$ について $DG(x, 0)$ は正則であることを示せ．

3) $t_0, \ldots, t_r \in [-a', a']$, $t_0 = -a' < t_1 < \cdots < t_r = a'$ と $\delta_i > 0$，ただし $\delta_i \leq a - a'$ が存在して

$$I_i = (t_i - \delta_i, t_i + \delta_i),$$
$$R_i = I_i \times (-\delta_i, \delta_i) \subset \mathbb{R}^2$$

と定めると

a) G の R_i への制限は R_i から $G(R_i)$ への C^r 級の微分同相写像である．

b) $f([-a', a']) \subset R_0 \cup \cdots \cup R_r$ が成り立つ．

が成り立つようなものが存在することを示せ．

ヒント：$[-a, a]$ はコンパクト集合[†1]である．コンパクト集合の定義あるいは Heine–Borel の定理について調べてみよ．

4) 3) の記号をそのまま用いる．$\delta > 0$ が存在して，G の $R' = (-a', t_1 + \delta_1) \times (-\delta, \delta) \subset \mathbb{R}^2$ への制限は R' から $G'(R')$ への C^r 級の微分同相であることを示せ．

ヒント：$i = 0, 1$ とする．素朴に考えれば G は R_i から $G(R_i)$ への微分同相であるから，単純に合わせて考えれば良さそうであるが，例えば $x_i \in I_i$ としたとき，$G(x_0, \mathbb{R})$ と $G(x_1, \mathbb{R})$ が交わらないとは限らない（例えば円や放物線を考えてみよ）．実際には第二成分の範囲は $\mathbb{R}$ 全体と比べてかなり小さくてよいことを用いて，このような状況をうまく回避する必要がある．上述のようなまずい状況が起きる場合に，例えば $T \in I_0 \cap I_1$ として $G(T, \mathbb{R})$ と $G(x_0, \mathbb{R})$ と $G(x_1, \mathbb{R})$ の交点の位置関係を観察してみよ．

5) $\epsilon > 0$ が存在して，G の $N_\epsilon = (-a', a') \times (-\epsilon, \epsilon) \subset \mathbb{R}^2$ への制限は N_ϵ から像 $G(N_\epsilon)$ への C^r 級の微分同相であることを示せ．

（以上）

[†1] 有界閉集合，としても今の場合同じことであるが，例えば今は一つであるパラメータが無限個存在するような状況では有界閉集合とコンパクト集合は異なる．前者はあまり役に立たないことが少なくない．