２０１７年度微分積分学（理 I 24–27 組向け，足助担当）演習問題 １６ v2 ’17/10/16（月）
’17/10/16：問 16.6, 16.7, 16.8 を追加．
’17/12/8：問 16.4 の注を追加．

**問 16.1** (演習問題（第 6 回）の問 6.1 も参照のこと)．$f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ が**リプシッツ連続**であるとは $L > 0$ が存在して，

$$\forall\, x, y \in U,\ \|f(x) - f(y)\| \leq L\,\|x - y\|$$

が成り立つことを言う．また，このような $L$ の下限を**リプシッツ定数**と呼ぶ．$f\colon U \to \mathbb{R}^m$ がリプシッツ連続ならば $f$ は $U$ 上一様連続であることを示せ．

**問 16.2.** 講義の補題 5.2.8 において $f$ は連続であるとする．不等号

$$-\int_P f^-(x)dx \leq \int_P f(x)dx \leq \int_P f^+(x)dx$$

において等号が成り立つための条件を求めよ．

**問 16.3.** $P$ を閉区間の直積とし，$f, g\colon P \to \mathbb{R}$ を可積分函数とする．$\max\{f,g\}, \min\{f,g\}\colon P \to \mathbb{R}$ を

$$\max\{f,g\}(x) = \max\{f(x), g(x)\},$$
$$\min\{f,g\}(x) = \min\{f(x), g(x)\}$$

により定めると，$\max\{f,g\}, \min\{f,g\}$ は共に可積分であって

$$\begin{aligned}\int_P \min\{f,g\}(x)dx &\leq \min\left\{\int_P f(x)dx, \int_P g(x)dx\right\}\\ &\leq \max\left\{\int_P f(x)dx, \int_P g(x)dx\right\}\\ &\leq \int_P \max\{f,g\}(x)dx\end{aligned}$$

が成り立つ事を示せ．

**問 16.4** (区分求積法)**.** $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ を連続とする．$n \geq 1$ とし，$i = 0, \ldots, n-1$ について $I_{i;n} = \left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right]$ とする[†1]．

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(\frac{i}{n}\right) = \int_0^1 f(x)dx$$

が成り立つことを示せ．

※ ここでは $I_{i;n}$ の幅は一定であるが，リーマン積分の定義ではこのようなことは特に仮定していない．この意味で，ここでの状況は特別である．

※※ $f$ は閉区間上の連続函数だから右辺は（リーマン積分として）定まる．それはそれとして左辺を考えることはできるが，それが右辺と一致するかが問題である．リーマン積分の定義が分かっていれば簡単な問題である．

**問 16.5** (簡単な図形の面積)**.** ここではやや直感的に（論理的には不十分に）面積について考える．正確なことは後日講義で扱う．

$f\colon [0,1] \to [0,1]$ を連続とし，$x \in [0,1]$ について $f(x) \geq 0$ とする．$K_f \subset \mathbb{R}^2$ を

$$K_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0,1],\ y \in [0, f(x)]\}$$

により定める．また，$n \geq 1$ とし，$i = 0, \ldots, n-1$ について $I_{i;n} = \left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right]$ とし，

$$L_n = \bigcup_{i=0}^{n-1} I_{i;n} \times \left[0, \sup_{x \in I_{i;n}} f(x)\right]$$

$$J_n = \bigcup_{i=0}^{n-1} I_{i;n} \times \left[0, \inf_{x \in I_{i,;}} f(x)\right]$$

[†1] 記号「,」と「;」には多くの場合数学的な差は無い．一般的には「;」の方が「,」よりも前後の記号の差異あるいは断絶が大きい．例えば 2 変数函数（の値）を $f(x,y)$ と表すとき，$x$ と $y$ は立場としては平等であるので，これを $f(x;y)$ と表すことはあまり多くない．後者のように表す場合には $x, y$ に（例えば物理的な）意味があって，変数として本質的に異なることが多い．例えば微分方程式の解で，初期条件を $c$，変数 を $t$ とするものを $y(t;c)$ のように表すことがある．この場合には $t$ と $c$ はいずれも解に関しては変数であるが，意味合いが全く異なるので「;」によって分けている．この場合にも $y(t,c)$ と表すことが少なくない．別な例を挙げる．分割 $\Delta$ に関する $f$ の過剰和 $\overline{s}(f;\Delta)$ と表すとき，$f$ と $\Delta$ の立場は平等ではない．ここで求めたいものはあくまで $f$ に関する量であって，$\Delta$ は立場としては従属的である．考え方次第なので，過剰和を $\overline{s}(f,\Delta)$ と表しても構わない．さらに別の例を挙げる．実数を成分とする $n$ 次の正方行列全体のなす集合は $M(n;\mathbb{R})$ などと表されるが，この場合 $n$ も $\mathbb{R}$ も重要である．ただ，$n$ の指す内容と $\mathbb{R}$ の指す内容には大きな差があるので，「;」で分けている．この場合にも $M(n,\mathbb{R})$ と表すことも少なくない．

と置く．

1) $\sup, \inf$ はそれぞれ $\max, \min$ で置き換えて良いことを示せ．
2) $f(x) = x^k,\ k \geq 0$，ただし $x^0 = 1$，と定める．$K_f$ 及び $L_n, J_n$ を図示せよ．包含関係に注意すること．
3) （$f$ は仮定を満たす一般のものとする．）$S_n, s_n$ を $L_n, J_n$ をそれぞれ自然に長方形に（縦に）分割して得られる面積とする．必要であればダルブーの定理を用いて $\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} S_n = \int_0^1 f(x)dx$ が成り立つことを示せ．
4) 以下では $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ とする．
$$g(x) = \begin{cases} 1, & x \in K_f, \\ 0, & x \notin K_f \end{cases}$$
とし，$g$ を二変数函数として積分することを考える．$g$ は二変数函数として積分可能であることはここでは認める．定義に従って $\int_{K_f} g(x)dx$ を求めるためには，$K_f$（を含む，閉区間の直積）の様々な分割あるいは，分割から定まる過剰和，不足和を考える必要があるが，ここでは以下の形の過剰和，不足和のみを考える．即ち，$n \geq 1$ とし，$i, j = 0, \ldots, n-1$ について $I_{i,j;n} = I_{i;n} \times I_{j;n}$ と置き，$I_{i,j;n}$ により与えられる $[0,1] \times [0,1]$ の分割を $\Delta_n$ とする．
   i) $S_n \leq \overline{s}(g; \Delta_n)$ 及び $s_n \geq \underline{s}(g; \Delta_n)$ が成り立つことを示せ．
   ii) $\lim_{n\to+\infty} \overline{s}(g; \Delta_n) = \lim_{n\to+\infty} \underline{s}(g; \Delta_n) = \int_{K_f} g(x)dx$ が成り立つことを示せ．
   iii) $\int_{K_f} g(x)dx = \int_0^1 f(x)dx$ が成り立つことを示せ．
   ※ 左辺の $x$ は二変数で，右辺の $x$ は一変数であるので注意せよ．

**問 16.6.** $n \in \mathbb{N}$ とし，$f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ を $f(x) = x^n$ により定める．ただし，$x^0 = 1$ と定める．

1) $\Delta = \{x_0, \ldots, x_k\}$ を $[0,1]$ の分割とするとき，過剰和 $\overline{s}(f; \Delta)$，不足和 $\underline{s}(f; \Delta)$ を求めよ．また，$i = 0, \ldots, k-1$ について $c_i \in [x_i, x_i + 1]$ とするとき，リーマン和 $s(f; \Delta, c)$ を求めよ．
2) $\delta(\Delta) \to 0$ とすると，1) の過剰和，不足和，リーマン和はいずれも $\dfrac{1}{n+1}$ に収束することを示せ．

**問 16.7.** $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ を $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \cap [0,1], \\ 0, & x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ により定める．

1) $p \in [0,1]$ とすると，$p$ において $f$ は連続でないことを示せ．
2) $\inf_{\Delta} \overline{s}(f;\Delta) = 1,\ \sup_{\Delta} \underline{s}(f;\Delta) = 0$ が成り立つことを示せ．従って $f$ は $[0,1]$ 上リーマン可積分でない．
3) $\Delta$ を $[0,1]$ の分割とする．

$$\forall n > 0,\ \exists \Delta, c,\ \delta(\Delta) < \frac{1}{n},\ s(f;\Delta,c) = 1$$

及び

$$\forall n > 0,\ \exists \Delta, c,\ \delta(\Delta) < \frac{1}{n},\ s(f;\Delta,c) = 0$$

が成り立つことを示せ．従って，$f$ は $[0,1]$ 上リーマン可積分ではない．

**問 16.8.** $f\colon [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ を $f(x,y) = x^2 + y^2$ により定める．

1) 定義を用いるか，あるいは過剰和，不足和を用いて $\displaystyle\int_{[0,1]\times[0,1]} f(x,y)dxdy = \frac{2}{3}$ が成り立つことを示せ．

※ 結構面倒くさい．

2) 一変数函数の積分は高校までの要領で行って良いことにする（微積分学の基本定理（後日示す）を認める）．このとき，

$F(y) = \displaystyle\int_0^1 f(x,y)dx$ （$y$ は一旦定数と考えて，$x$ のみについて積分する），

$G(x) = \displaystyle\int_0^1 f(x,y)dy$

と定める．この時，

$$\int_{[0,1]} F(y)dy = \int_{[0,1]} G(x)dx = \frac{2}{3} = \int_{[0,1]\times[0,1]} f(x,y)dxdy$$

が成り立つことを示せ．

※ こちらは簡単である．

（以上）