問 15.1. $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,\ g\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ は C^2 級とする．このとき，

$$\frac{\partial^2 (g\circ f)}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{l=1}^{m}\left(\frac{\partial^2 g}{\partial y_l \partial y_k}\circ f\right)\frac{\partial f_l}{\partial x_i}\right)\frac{\partial f_k}{\partial x_j} + \sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial g}{\partial y_k}\circ f\right)\frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i \partial x_j}$$

が成り立つことを示せ．

問 15.2. $A \in M_{m,n}(\mathbb{R}),\ B \in M_{n,l}(\mathbb{R})$ とし，$f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,\ g\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$ をそれぞれ $f(x) = Ax$，$g(y) = By$ により定める．$Df,\ Dg,\ D(g\circ f)$ を求めよ．

ヘシアンを用いて極大点あるいは極小点を調べることについて

ヘシアンを用いて，臨界点が極大点あるいは極小点であることを示すことを，しばしば「判定する」と言ってしまい，例えば「ヘシアンによる判定法」などと呼ぶが，これによって可能であるのは臨界点が極大点あるいは極小点，あるいは峠点**である**ことであって，これらのいずれでもないことを示すことは**一般には不可能**である．

問 15.3. 以下の函数 $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ について，原点は臨界点であって，逆に臨界点は原点のみであることを示せ．また，臨界点（＝原点）o におけるヘシアン $Hf(o)$ について $\det Hf(o) = 0$ が成り立つ[†1]ことを示せ．また，a が極大点，極小点，峠点，そのいずれでもないか判定せよ．
※ ヘシアンを用いて判定するのは不可能である．ここでは直接調べるのが簡単である．

1) $f(x,y) = x^4 + y^4$
2) $f(x,y) = -x^6 - y^4$
3) $f(x,y) = x^4 - y^4$
4) $f(x,y) = x^2 + y^3$

ヘシアンを用いて極大・極小について調べる際には行列の固有値や二次形式などを用いる必要が生じたが，二変数の場合には表向きはこれらは回避できる．

まず，固有値とトレース，行列式に関して述べておく．

[†1] $\det Hf(a) = 0$ が成り立つような臨界点 a を**退化した臨界点**と呼ぶことがある．対して，$\det Hf(a) \neq 0$ が成り立つような臨界点を**非退化な臨界点**と呼ぶ．

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ を実対称行列とする．$f_A(t) = \det(tE_2 - A) = t^2 - (a+c)t + ac - b^2$ とする．$f_A(t) = 0$ の解は $t = \dfrac{a+c \pm \sqrt{(a+c)^2 - 4(ac-b^2)}}{2} = \dfrac{a+c \pm \sqrt{(a-c)^2 + 4b^2}}{2}$ である．

1) $\operatorname{tr} A = a + c > 0$ の場合．

$\det A = ac - b^2 > 0$ であれば $\sqrt{(a+c)^2 - 4(ac-b^2)} < |a+c|$ が成り立つので，解はいずれも正の実数である．$\det A = ac - b^2 < 0$ であれば $\sqrt{(a+c)^2 - 4(ac-b^2)} > |a+c|$ が成り立つので，解の一つは正の，もう一つは負の実数である．最後に，$\det A = ac - b^2 = 0$ であれば $\sqrt{(a+c)^2 - 4(ac-b^2)} = |a+c|$ が成り立つので，解の一つは正の，もう一つは 0 である．

2) $\operatorname{tr} A = a + c < 0$ の場合．

全体的に正負が入れ替わるが，1) と同様である．

3) $\operatorname{tr} A = a + c = 0$ の場合．

解は $t = \pm\sqrt{a^2 + b^2}$ で与えられる．$A = O_2$ ならば解は 0 のみであるし，そうでなければ正の解と負の解を一つずつ持つ．

※ $\operatorname{tr} A \neq 0$ ならば $a \neq 0$ あるいは $c \neq 0$ が成り立つことに注意せよ．

以下では $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を C^2 級とする．

問 15.4. $p \in \mathbb{R}^2$ とする．このとき，ある $\theta \in (0,1)$ について

$$f(p) = f(o) + Df(x)p + \frac{1}{2}{}^t pHf(\theta p)p$$

が成り立つことをテーラーの定理を用いて示せ．

ヒント：右辺の最後の項は f の 2 次微分に関する項をを書き換えたものである．

以下では $f - f(o)$ を考える（平行移動する）ことにして，$f(o) = 0$ と仮定する．さらに，原点 o は臨界点だと仮定する．即ち，$Df(o) = 0$ が成り立つとする．すると，$f(p) = \dfrac{1}{2}{}^t pHf(\theta p)p$ が成り立つ．$p = (x, y)$ としてこれを書き下すと

$$f(x,y) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\theta p)x^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\theta p)xy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\theta p)y^2\right) \tag{15.5}$$

を得る．今は f が正の値を取るか，負の値を取るか，あるいは 0 を取るかだけが問題で，具体的な値には興味が無いので係数の $\dfrac{1}{2}$ は以下では省くことにする．

さて，定義により

$$\operatorname{tr} Hf(q) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(q) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(q),$$
$$\det Hf(q) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(q)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(q) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(q)\right)^2$$

が成り立つ．ここで，$q \in \mathbb{R}^2$ であるが，$q = \theta p$ と考えても良い．以下，場合を四つに分ける．

i) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(q) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(q) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(q) = 0$ の場合．

この場合は q におけるヘシアンは零行列であって，情報を取り出すことは難しいのでここでは諦める（例えば 3 次の項を調べるなど，別な方法が必要になる）．

問 15.6. この条件は $\operatorname{tr} Hf(q) = \det Hf(q) = 0$ が成り立つことと同値であることを示せ．

ヒント：$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(q) = -\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(q)$ が成り立つ．これを $\det Hf(q)$ の具体的な表式と比べれば $Hf(q)$ の成分がいずれも 0 に等しいことが分かる．

ii) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(q) \neq 0$ の場合．

式 (15.5) の右辺（を 2 倍したもの）について

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(q)x^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(q)xy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(q)y^2$$
$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(q)\left(\left(x + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(q)\Big/\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(q)\right)y\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(q)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(q) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(q)\right)^2\right)y^2\Bigg/\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(q)\right)^2\right)$$
$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(q)\left(\left(x + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(q)\Big/\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(q)\right)y\right)^2 + Hf(q)y^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(q)\right)^{-2}\right)$$

が成り立つ．

問 15.7. 計算を確かめよ．

iii) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(q) \neq 0$ の場合は ii) と同様である．

iv) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(q) \neq 0$，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(q) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(q) = 0$ の場合．

式 (15.5) の右辺（を 2 倍したもの）について

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(q)x^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(q)xy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(q)y^2 = 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(q)xy$$

が成り立つ．ここで $(u, v) = (x - y, x + y)$ とする．$(x, y) = ((u + v)/2, (v - u)/2)$ なので (x, y) の代わりに (u, v) を変数と考えても（極大，極小に関して調べる分に関しては）よい．$g(u, v) = f((u + v)/2, (v - u)/2)$ とすると $g(o) = f(o) = 0$ が成り立つ．また，

$$Dg(o) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(o) & \frac{\partial f}{\partial y}(o) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = (0\ 0)$$

が成り立つ．最後に，$q = (q_1, q_2)$ として，$r = ((q_1 + q_2)/2, (q_1 - q_2)/2)$ と置けば

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(r) &= \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(q)\frac{1}{2} - \frac{\partial f}{\partial y}(q)\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(q)\frac{1}{4} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(q)\frac{1}{4} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(q)\frac{1}{4} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(q)\frac{1}{4} \\ &= -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(q), \\ \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(r) &= \frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u}(r) = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(q) - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(q)\right) = 0, \\ \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(r) &= \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(q) \end{aligned}$$

が成り立つので ii) あるいは iii) で，$\det Hf(q) < 0$ の場合に帰着できる．

問 15.8. 計算を確かめよ．

改めて $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を C^2 級とし，$f(o) = 0$，$Df(o) = 0$ とする．また，$H = Hf(o) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(o) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(o) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(o) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(o) \end{pmatrix}$ と置く．上で調べたように，$H \neq 0$ ならば $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(o) \neq 0$ と仮定して良い．まず $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(o) > 0$ とする．

1) $\det H > 0$ の場合（上の議論で $q = 0$ としたときに，ii), iii) で明示的に $\det H \neq 0$ と仮定するか，iv) の場合である）．

この場合には，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(o) > 0$ であることから H は正値となる．$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$，$\det Hf$ は連続であるから，$\delta > 0$ が存在して，$q = (x, y)$ について $\|q\| = \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$ ならば $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(q) > 0$，$\det Hf(q) > 0$ として良い．このような q については $Hf(q)$ も正値である．すると，$p \in \mathbb{R}^2$, $\|p\| < \delta$ ならば，テーラーの定理により $\theta \in (0, 1)$ について

$$f(p) = \frac{1}{2}{}^t pHf(\theta p)p > 0$$

が成り立つ．従って o は f の極小点である．

※ $\det Hf(\theta p) > 0$ だから $f(p) > 0$ が正値になる，というのは不十分で，条件 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(o) > 0$ を用いている．実際，この不等号の向きが変わると結論も変わる．

2) $\det H < 0$ の場合．

この場合は，1) とほとんど同様であるが，$\det Hf(q) < 0$ が成り立つ．この時には線型代数を少し用いると o は f の峠点であることが示せる．

問 15.9. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(o) < 0$ の場合もほぼ同様である．全体的に符号が変わるので，$\det H > 0$ が成り立つ場合には o は極大点となる．$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(o) > 0$ の場合を真似て調べてみよ．

最初に述べたように，$\det H = 0$ の場合には何が起きるのかは場合によってしまい，簡単には記述できない．

（以上）