２０１７年度微分積分学（理Ｉ 24–27 組向け，足助担当）演習問題 １３ v3 2017/7/10（月）
'17/7/12：問 13.8 を追加
'17/7/19：問 13.9 を追加

テーラー展開は（剰余項があるにせよ，ないにせよ）理論的に重要であるが，実際的も例えば近似計算において重要である．

問 13.1. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を実数列とする．$a = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ が収束しているとして，a を近似的に求めることを考える．例えば a を有効数字 3 桁で求めようとする場合について，以下の問に答えよ．以下では $a(r) = \displaystyle\sum_{n=0}^{r} a_n$ と置く．仮定により $\displaystyle\lim_{r\to+\infty} a(r) = a$ である．また，話を簡単にするために，a の整数部分は 2 だとする．

1) 近似は小数点以下を切り捨てることにより行うこととする．
   a) $\displaystyle\sum_{n=r+1}^{+\infty} |a_n| < 0.001$ が成り立つとしても，$\displaystyle\sum_{n=0}^{r} a_n$ は求める近似では必ずしも無いことを例を挙げることにより示せ．また一般に，$\epsilon = 10^{-k}$, $k > 0$ とし，$\displaystyle\sum_{n=r+1}^{+\infty} |a_n| < \epsilon$ が成り立つとしてもやはり同様であることを例を挙げることにより示せ（k に依存して良い）．
   ヒント：真の値が 2.000 だとする．有効数字が 3 桁なので求める近似値は 2.00 である．$2.00 = 1.9999 + 0.0001$ が成り立つが，これは近似値が 1.99（3 桁で打ち切った）で，誤差が 0.001 の場合（なので，求められているよりも精密）だと考えられる．しかし,「近似値」1.99 はもちろん真の値 2.000 とも，実際の近似値 2.00 とも一桁も合っていない．
   b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{r} a_n$ の 4 桁目（小数点以下第 3 桁）を α とする．$\beta = \min\{9-\alpha, \alpha\}$ とする．$\beta > 0$ とすると $\displaystyle\sum_{n=r+1}^{+\infty} a_n < 0.00\beta$ が成り立つならば，$\displaystyle\sum_{n=0}^{r} a_n$ は求める近似を与えることを示せ．$\beta = 0$ の場合にはどのようにすれば良いか，有効な方法を一つ示せ（必ずしも解答は一意的ではないが，普通に解けば単一の方法に帰着されると思われる）．
2) 近似を小数点以下切り上げ，あるいは四捨五入などにしても同様なことを示せ．即ち，例えば有効数字 3 桁の近似を求めるために,「残りの項」の絶対値の和が 0.001 より小さくなるように和を取っても必ずしも正しい近似が得られないことを示せ．

例えば大量にデータを処理する場合にはいかに処理をサボるかは重要なことの一つである．誤ったサボり方をするとひどいことになる．

問 13.2. 1) e^3 を有効数字 3 桁で求めよ．

2) e^3 を，e^x の原点を中心とするテーラー展開を用いて有効数字一万桁で求めるために必要な（テーラー展開による）多項式近似の次数を求めよ．解き方により値は異なるが，最小値は定まる．興味があれば求めてみよ．必要に応じて計算機を用いてよいが，とにかく必要な次数を求めるならばもっと簡単である．

3) $\tan$ の逆函数を $\arctan\colon \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ とする（特に $\arctan 0 = 0$ である）．

a) $\arctan x$ の $x = 0$ におけるテーラー展開（剰余項のないもの）を求めよ．

b) a) を用いて $\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ が成り立つような $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を一つ定めよ．

c**) b) で定めた $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ について，$s_m = \sum_{n=0}^{m} a_n$ を計算機を用いて計算し，$(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の収束がいかにも遅いことを観察せよ．

※ 実際には $(4s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を計算した方が観察しやすい．

d***) 円周率を計算機で近似計算することについては，必ずしも専門家でなくとも読める文献が多い．これらにあたって，速い計算アルゴリズムをどのように得ているか調べてみよ[†1]．

問 13.3 *. $I = [0.1]$ とし，$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を I 上の連続函数列とする．また，$f\colon I \to \mathbb{R}$ を連続函数とする．

1) $x \in I$ を固定するごとに $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$ が成り立つとする．

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 f(x)dx$$

が成り立たないような $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$，f の例を一組挙げよ．

2) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は $n \to +\infty$ で f に一様収束するとする．

a)

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ n \geq N \Rightarrow \left|\int_0^1 (f_n - f)(x)dx\right| < \epsilon$$

が成り立つことを示せ．

ヒント：$\forall x \in [0,1],\ |f_x(x) - f(x)| < \epsilon$ ならば $\int_0^1 |f_n(x) - f(x)|\, dx < \epsilon$ が成り立つ．

[†1] π の計算そのものに余り深入りしても仕方がないので，ほどほどでよい．

b)
$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 f(x)dx$$
が成り立つことを示せ．

問 13.4. $f\colon(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$ を $f(x)=\dfrac{1}{1+x^3}$ により定める．また，$x\in(-1,1)$ について $F(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)\,dx$ とする．

1) $F(x)$ を求めよ．
   ヒント：求め方は幾つかあるが，例えば $1+x^3=(1+x)(1-x+x^2)$ であることに着目して $\dfrac{1}{1+x^3}=\dfrac{a}{1+x}+\dfrac{b+cx}{1-x+x^2}$, $a,b,c\in\mathbb{R}$ と表す．次に，$1-x+x^2=\dfrac{3}{4}+\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2$ であることを踏まえて $x-\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}y$ とする．このとき，$\displaystyle\int\frac{b+cx}{1-x+x^2}dx=\int\frac{d+ey}{1+y^2}dy$ がある $d,e\in\mathbb{R}$ について成り立つ．最後の積分は容易である．
2) 1) の結果をテーラー展開することにより，$F(x)$ を冪級数（a_nx^n の和）を用いて表せ．
   また，結果を $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^x(-t^3)^n dt$ と比較せよ．
3) $F(1/2)$ を小数点以下 2 桁まで求めよ．

問 13.5. $f(x)=\cosh x-\left(1+\dfrac{x^2}{2}\right)$ と置く．

1) $|f(x)|<0.1$ が成り立つような x の範囲を求めよ．
2) $\left|1-\dfrac{f(x)}{\cosh x}\right|<0.1$ が成り立つような x の範囲を求めよ．

※ $\cosh x$ のグラフは**懸垂線**と呼ばれ，例えば端点を固定してケーブルなどを垂らしたときに現れる．実験的な観察のみがなされていた頃は放物線と考えられていた（らしい）．

テーラー展開の収束について，講義で証明を一部省略したが，これは例えば次のようにすればよい．

問 13.6 ***.** $a\in[\alpha,\beta]$ とし，$f\colon[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ を C^∞ 級の函数とする．また，
$$\exists C\geq 0,\ \exists M\geq 0,\ \forall x\in[\alpha,\beta],\ \forall n,\ |D^nf(x)|\leq CM^n$$
が成り立つとする．$\displaystyle\lim_{r\to+\infty}R_r(x)=0$ が成り立ち，この収束は一様であることは既に示した．従って
$$s(x)=\lim_{r\to+\infty}\sum_{n=0}^{r}\frac{D^nf(a)}{n!}(x-a)^n$$

と置けば $f(x) = s(x)$ が成り立つ．これらのことを踏まえて，

$$s_r(x) = \sum_{n=0}^{r} \frac{D^n f(a)}{n!}(x-a)^n,$$
$$S_r(x) = \sum_{n=0}^{r} \left| \frac{D^n f(a)}{n!}(x-a)^n \right| = \sum_{n=0}^{r} \frac{|D^n f(a)|}{n!} |x-a|^n$$

と置く．以下では，必要であれば $a \in \mathbb{R}$ について

$$e^a = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} a^n$$

が成り立つことを用いて良い[†2]．

1) x を固定する．$(s_r(x))_{r\in\mathbb{N}}$ が絶対収束することと，$(S_r(x))_{r\in\mathbb{N}}$ が収束することは同値であることを確かめよ．
2) $(S_r(x))_{r\in\mathbb{N}}$ が（x に関して）一様収束するならば，$(s_r(x))_{r\in\mathbb{N}}$ も一様収束することを示せ．
3)
$$S_r(x) \leq \sum_{n=0}^{r} \frac{CM^n}{n!}(\beta-\alpha)^n = Ce^{M(\beta-\alpha)}$$
が成り立つことを示せ．また，$S_r(x)$ は正項級数（和の各項が非負であるような級数）であることに注意して，$S_r(x)$ は $r \to +\infty$ で収束することを示せ．従って $(s_r(x))_{r\in\mathbb{N}}$ は絶対収束する．
4) 3) により $(S_r(x))_{r\in\mathbb{N}}$ は $r \to +\infty$ で収束するので，$S(x) = \lim_{r\to+\infty} S_r(x)$ と置く．
$$|S_r(x) - S(x)| \leq \sum_{n=R+1}^{+\infty} \frac{CM^n}{n!}(\beta-\alpha)^n$$
が成り立つことを示せ．また，このことを用いて $S_r(x)$ は $S(x)$ に $[\alpha,\beta]$ 上一様収束することを示せ．

問 13.7. 1) コーシーの平均値の定理において，Dg は (a,b) 上 0 にならないとする代わりに Df は (a,b) 上 0 にならないとする．このとき，$c \in (a,b)$ が存在して $\dfrac{g(b)-g(a)}{f(b)-f(a)} = \dfrac{Dg(c)}{Df(c)}$ が成り立つことを示せ．

2) $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ は連続であって，(a,b) で微分可能とする．また，$D\gamma$ は (a,b) 上 0 にならないとする．即ち，$\gamma = (f,g)$ と函数 f,g を用いて表したとき，$t \in (a,b)$ について

[†2] 実際には不要であるが，用いると大分楽である．

$D\gamma(t) = (Df(t), Dg(t))$ は $(0,0)$ にならないとする[†3]．$\gamma(a) \neq \gamma(b)$ とすると，$c \in (a,b)$ と，$\lambda \in \mathbb{R},\ \lambda \neq 0$ が存在して $\dfrac{\gamma(b)-\gamma(a)}{b-a} = \lambda(Df(c), Dg(c))$ が成り立つことを示せ．ヒント：$H(x) = (g(b)-g(a))(f(x)-f(a)) - (f(b)-f(a))(g(x)-g(a))$ としてコーシーの平均値の定理の証明を真似てみよ．

問 13.8. ロピタルの定理を示せ．必要であれば以下に従うとよい．

定理 (ロピタルの定理)．$a < b$ とする．ただし，$a = -\infty,\ b = +\infty$ の場合も許す．また，$f, g\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ は微分可能であって，(a,b) 上 Dg は 0 にならないとする．さらに，$\lim_{x\to a+0} f(x) = \lim_{x\to a+0} g(x) = 0$ とし，$\lim_{x\to a+0} \dfrac{Df(x)}{Dg(x)} = \alpha$ とする．ただし，$\alpha = +\infty$ あるいは $\alpha = -\infty$ の場合も許す．このとき，$g(x)$ は (a,b) 上 0 にならず（このことを g は (a,b) 上 0 を取らない，と言う），また，$\lim_{x\to a+0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \alpha$ が成り立つ．

0) $a = -\infty$ の場合には $x \to a+0$ は $x \to -\infty$ と同じことであることを確かめよ．形式的な話と思って納得すれば良い．

1) g は狭義単調増加あるいは狭義単調減少であることを示せ．
ヒント：$c, c' \in (a,b),\ c < c'$ について $g(c) = g(c')$ が成り立つとすると，平均値の定理によりある $c'' \in (c, c')$ について $Dg(c'') = 0$ が成り立つ．Dg が連続であるかどうかは分からないので，例えば Dg が常に正あるいは常に負であるかは分からないことに注意せよ[†4]．

2) g は (a,b) 上 0 をとらないことを示せ．

3) $\varepsilon > 0$ とする．$a \in \mathbb{R}$ ならば
$$\exists\,\delta > 0,\ 0 < x - a < \delta \Rightarrow \left|\frac{Df(x)}{Dg(x)} - \alpha\right| < \varepsilon$$
が成り立ち，$a = -\infty$ の時には
$$\exists\,M < 0,\ x < M \Rightarrow \left|\frac{Df(x)}{Dg(x)} - \alpha\right| < \varepsilon$$
が成り立つことを示せ．

4) $x \in (a,b),\ 0 < x - a < \delta$，を固定する．
$$\delta_1 > 0,\ 0 < t - a < \delta_1 \Rightarrow \left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x)-f(t)}{g(x)-g(t)}\right| < \varepsilon$$
が成り立つことを示せ．

[†3]講義でも時々述べているが，γ は列ベクトルで表した方が線型代数との整合性は高い．一方，伝統的な微積分における記法では行ベクトルを用いる．

[†4]もし分かってしまえば話は簡単であるが，そうしたければ仮定を増やす必要がある．

5) $a < t < x$ とすると，ある

$$\exists u \in (t, x),\ \frac{f(x) - f(t)}{g(x) - g(t)} = \frac{Df(u)}{Dg(u)}$$

が成り立つことを平均値の定理を用いて示せ．

6) $\min\{\delta, \delta_1\}$ を改めて δ とする．従って，$0 < x - a < \delta$ であれば，$a < t < u < x$ を上のように選ぶことができることを示せ．

ヒント：u は必ずしも具体的には選べないが，t は具体的に選べる．

7) 6) の x, t, u について

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \alpha\right| &\leq \left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x) - f(t)}{g(x) - g(t)}\right| + \left|\frac{f(x) - f(t)}{g(x) - g(t)} - \alpha\right| \\ &< \varepsilon + \left|\frac{Df(u)}{Dg(u)} - \alpha\right| \\ &< 2\varepsilon\end{aligned}$$

が成り立つことを示せ．また，これでロピタルの定理が示せていることを確かめよ．

問 13.9. $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ とする．

1) $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ $g(x) = x$ とする．f は $x = 0$ で微分可能であることを示せ．また，$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f}{g}(x)$ は存在するが $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{Df}{Dg}(x)$ は存在しないことを示せ（収束しないことはきちんと収束の定義に基づいて示すこと）．

2) $f(x) = \sin x,\ g(x) = x$ とする．$\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\frac{f}{g}(x)$ は存在するが $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\frac{Df}{Dg}(x)$ は存在しないことを示せ（収束しないことはきちんと収束の定義に基づいて示すこと）．

（以上）