２０１６年度数理科学基礎II（理I 6,7,9,10 組向け，足助担当）演習問題 ５　2016/5/16（月）

問 5.1. V, W, U, X を集合とし，$f\colon V \to W,\ g\colon W \to U,\ h\colon U \to X$ を写像とする．この時,

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

が成り立つことを示せ.
ヒント：真面目に計算すれば良い.

問 5.2***.** $A \in M_{m,n}(K),\ B \in M_{n,l}(K),\ C \in M_{l,p}(K)$ とする．問 5.1 と，K^n から K^m への線型写像の表現行列の一意性を用いて

$$(AB)C = A(BC)$$

が成り立つことを示せ.

問 5.3. $A \in M_n(K)$ が正則であるならば A^{-1} も正則であることを示せ．また，$(A^{-1})^{-1} = A$ が成り立つことを示せ.

問 5.4***.** $f\colon V \to W$ を線型写像とする．f に逆写像 $g\colon W \to V$ が存在すれば，g は線型写像であることを示せ.
ヒント：例えば $f(g(w+w') - (g(w) + g(w'))$ を，f が線型であることに注意して計算してみよ.

問 5.5. $n = 1$ の場合には $K^1 = K$ の線型変換は定数倍のみである．つまり，f を K^1 の線型変換とすると，$a \in K$ が存在して $f(v) = av$ が成り立つことを示せ.

問 5.6. $A \in M_{m,n}(K),\ B \in M_{n,l}(K)$ とし，

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1N} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{M1} & A_{M2} & \cdots & A_{MN} \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1L} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2L} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_{N1} & B_{N2} & \cdots & B_{NL} \end{pmatrix}$$

と区分けされているとする．さて，適当な $m_i, n_j, l_k,\ 1 \leq i \leq M,\ 1 \leq j \leq N,\ 1 \leq k \leq L$ が存在して,

1) $\displaystyle\sum_{i=1}^{M} m_i = m,\ \sum_{j=1}^{N} n_j = n,\ \sum_{k=1}^{L} = l$ が成り立つ.
2) A_{ij} のサイズは $m_i \times n_j$，B_{jkK} のサイズは $n_j \times l_k$ である.

が成り立つとする．このとき，$1 \leq i \leq M,\ 1 \leq j \leq L$ について

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{N} A_{ik} B_{kj}$$

と定める.

$$AB = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1L} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{M1} & C_{M2} & \cdots & C_{ML} \end{pmatrix}$$

が成り立つことを示せ.

定義 5.7. $v \in \mathbb{R}^2$ $v \neq o$とする．$\mathbb{R}^2$内の，原点を通る直線 $L = \{w \in \mathbb{R}^2 \,|\, \langle v \,|\, w \rangle = 0\}$を考える．ここで $\langle \cdot | \cdot \rangle$で標準ユークリッド内積を表す．$p \in \mathbb{R}^2$の，$\langle \cdot | \cdot \rangle$に関する，$L$への**正射影**と$L$に関する**鏡映**（どちらも$L$だけでなく，内積に依存して定まる）をそれぞれ以下のように定める．q, rをそれぞれ正射影，鏡映によるpの像とする（それぞれ**正射影**，**鏡像**と呼ぶ．正射影は用語が重複して混乱するので，ここでは正射影による像，と呼ぶ）．

1) $p \in L$であれば，$q = r = p$とする．
2) $p \notin L$とする．
   a) qをpからLに下ろした垂線の足とする．
   b) rを次の条件を満たす点とする．
      i) pとrを結ぶ線分L'はLに直交する．L'とLの交点はqであることに注意しておく．
      ii) 内積から定まる距離dについて$d(p, q) = d(r, q)$が成り立つ．

※「垂線」「直交」と言っている時点で，内積に依存した定義であることに注意せよ．内積を用いて定義するが，用いた内積に実は依存しない，という可能性は一般論的にはあるが，ここではそうではなく，実際に依存する．

問 5.8. $v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ $v \neq o$とする．$\mathbb{R}^2$内の，原点を通る直線 $L = \{w \in \mathbb{R}^2 \,|\, \langle v \,|\, w \rangle = 0\}$を考える．ここで $\langle \cdot | \cdot \rangle$で標準ユークリッド内積を表す．次の要領で，標準ユークリッド内積に関する，Lへの正射影とLに関する鏡映をそれぞれ求めよ．$p = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$とする．

1) $p \notin L$とする．
   a) $r = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$とする．$r$が$p$の$L$に関する鏡像であることと，$\dfrac{p+r}{2} \in L$かつ$\langle p - r \,|\, v \rangle = 0$が成り立つことは同値であることを確かめよ．
   b) $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$は方程式（$X, Y$に関する連立一次方程式）
   $$\begin{pmatrix} b & -a \\ a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b & a \\ a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
   の解であることと，実際にこの方程式は一意的に解を持つことを示せ．
   c) qをx, y, a, bを用いて表せ．
2) 1) で得たq, rの式は$p \in L$としても適用できることを示せ．
3) $v = \begin{pmatrix} \sin\theta \\ -\cos\theta \end{pmatrix}$の場合に，$q, r$を$\theta$（と$x, y$）を用いて表せ．
4) $\mathbb{R}^2$，Lの代わりに$\mathbb{R}^n$と$\mathbb{R}^n$の超平面を考える．具体的には$v = {}^t(v_1 \ \cdots \ v_n) \neq o$とし，$L = \{w \in \mathbb{R}^n \,|\, \langle v \,|\, w \rangle = 0\}$とする．$p$の$L$への正射影と$L$に関する鏡映が$\mathbb{R}^2$の場合と全く同様に定まる．必要であれば定義を調べた上で，それぞれについて 1)，2) の要領で具体的に求めよ．

（以上）