２０１６年度数理科学基礎II（理I 6,7,9,10 組向け，足助担当）演習問題 4　　2016/5/6（金）

講義で配布する演習問題全般に関する注意（承前）．

- 期末試験やターム末試験の事前公開ではないが，個別問題の水準に関するある程度の目安とすると良い．適切と判断した場合には演習問題と類似あるいは同一の問題を出題する．
- 今学期に関しては演習問題は次のように作成している．
  1) まず講義の用意をする．これには理解の助けになると期待される問題なども含まれる．
  2) 上述の問題のうち，足助が説明するのではなく，自力で分かった方が良いと思われるものに，付随的な問題，さらに少し発展的な問題を加えて演習問題とする．

  従って配布する演習問題は講義の一部である．初回（第２回）講義で述べたように，資料集は共通問題（や確認問題）を解くのに困難を生じない程度に参考とはしているが，依拠は全くしていないので注意すること．
- 「$*$」が付いている問は $*$ の数が多いほど難しい（と思って出題している）が，$*$ の数と「今は分からなくてもよい」度合いは必ずしも一致しないので注意すること．どの程度分かることを期待しているかは講義で極力述べているつもりである．
- 児玉教員の担当分（数理科学基礎 I）に関する扱いについては足助は関知しない．

共通資料及び講義で配布する演習問題に関する注意．

- 共通資料には誤植がある．新たな発見に伴って情報が掲載されるので，時々
  http://faculty.ms.u-tokyo.ac.jp/~sugaku/ms_s1.html
  を参照すること．訂正は把握していると仮定されている．
- 演習問題にもしばしば誤植，あるいはまれに根本的な誤りがある．よほどのことがなければ訂正は講義では述べないが，
  http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~asuke/kougi/index.html
  に最新版を掲載している．訂正は把握していると仮定している．

共通資料，演習問題いずれについても，一定程度考えた上で，やはりおかしいという場合には遠慮無く指摘すること．なお，指摘が誤りであっても成績評価には影響しない．

以下では $K = \mathbb{R}$ あるいは $K = \mathbb{C}$ とする．

問 4.1. $A \in M_n(K)$ とする．

1) $w \in K^n$ を固定する．$f\colon K^n \to K$ を

$$f(v) = {}^t vAw$$

により定めると，f は**線型写像**である，即ち

a) $\forall\, v, v' \in K^n,\ f(v+v') = f(v) + f(v')$.

b) $\forall\, v \in K^n,\ \lambda \in K,\ f(\lambda v) = \lambda f(v)$.

が成り立つことを示せ．

2) $v \in K^n$ を固定する．$f\colon K^n \to K$ を

$$f(w) = {}^t vAw$$

により定めると，f は線型写像であることを示せ．

3) A が対称行列であることと，$\forall v, w \in K^n,\ {}^t vAw = {}^t wAv$ が成り立つことは同値であることを示せ．

ヒント：真面目に成分で書き下せば示せる．あるいは，A が対称行列でないとして，対象でない成分に着目して v, w を適当に（適切に）定めてそれを取り出す方法を考えても良い．

問 4.2 ***.** $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy^2}{x^2+y^4} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

により定める．

1) f のグラフを描いてみよ．原点の近傍，例えば $\{{}^t(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 < 1\}$ で考えれば十分である（半径はもっと小さくても良い）[1]．
2) $t \in \mathbb{R}$ とし，$y = tx$ とする（${}^t(x,y) = x\,{}^t(1,t)$ とする）．
   a) $f(x,y)$ を t, x を用いてなるべく簡潔に表せ．これを（x を固定し）t の函数とみなして $g(t)$ とする．
   b) $g(t)$ は t に関して微分可能であることを示せ．余裕があれば，極大点，極小点，いずれでもない臨界点について調べよ．
3) $t \in \mathbb{R}$ とし，$x = 0, y = t$ とする（${}^t(x,y) = {}^t(0,t)$ とする）．このとき，$f(x,y)$ を t の函数とみなすと，恒等的に 0 であることを示せ．特に,（わざわざ）この函数を $h(t)$ とすると，h は t に関して微分可能である．
4) ${}^t(x,y) = x\,{}^t(1,t)$ とするか，${}^t(x,y) = {}^t(0,t)$ とすることで，$\mathbb{R}^2$ 内の原点を通る直線は全て表すことができることを示せ．
5) $k(t) = (t^2, t)$ とする．$k(t)$ をなるべく簡潔に表せ．特に $\lim_{t\to 0} k(t)$ を求めよ．
6) f は $\mathbb{R}^2$ の原点において連続でないことを示せ．

注. このように，$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ が，原点を通る任意の直線に沿って微分可能であっても，二変数函数としては微分可能どころか，連続ですらないことがある．この辺の細かいところについては「微分積分学」で扱う．二変数函数，より一般に多変数函数は直感が働きにくく，あるいは直感が大概外れるもので，慎重な扱いを要する．

問 4.3. $p, r \in \mathbb{R}$ とする．また，$v \in \mathbb{R}^2$ を $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と表す．

$$f(v) = px^2 + ry^2$$

[1] うるさく言えば，(x, y) と $(x\ y)$ は異なる（だから異なる記法を用いている）．とはいえ，これらを区別する理由は今のところ無いので，カンマは邪魔にならなければ自由に入れて良い．邪魔になる例としては，例えば $m \times n$ 行列を考える際が挙げられる．いちいちカンマを入れると却って見にくい．

で定まる二次形式のグラフを

1) $p>0,\ r>0$.（原点は最小点かつ極小点である.）

2) $p>0,\ r<0$.（原点は臨界点であるが，極小点，最小点でも極大点，最大点でもない.）

3) $p>0,\ r=0$.（原点は最小点であるが，極小点ではない.）

4) $p=r=0$.（常に 0 に等しい.）

のそれぞれの場合に描け.

問 4.4. $G=\begin{pmatrix} p & \frac{q}{2} \\ \frac{q}{2} & r \end{pmatrix}$ と置く.

1) $p\neq 0$ とする．$A=\begin{pmatrix} 1 & -\frac{q}{2p} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とするとき，${}^tAGA$ を求めよ.

2) $p=r=0$ とする．$A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ とするとき，${}^tAGA$ を求めよ.

f を二変数の二次形式とし，対称行列 G を用いて $f(v)={}^tvGv$ と表す．f の振る舞いは G の**行列式** $\det G$ と**トレース**（跡）$\operatorname{tr} G$ で判別できた．ここで，一般に $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\in M_2(K)$ について

$$\det A = a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12},$$

$$\operatorname{tr} A = a_{11}+a_{22}$$

と定める．ちなみに，$A=(a)\in M_1(K)$ ならば

$$\det A=\operatorname{tr} A = a$$

である.

問 4.5. $A\in M_2(K)$ とする．$\varphi(t)=\det(tE_2-A)$ と置くと

$$\varphi(t)=t^2-(\operatorname{tr} A)t+\det A$$

が成り立つことを示せ．$\varphi(t)$ を A の**固有多項式**あるいは**特性多項式**と呼ぶ.

注. φ は固有多項式を表すのに比較的良く用いるが，決まっているわけではない．また，変数も（ほかと被らなければ）何でも良い．例えば λ なども良く用いられる．任意の正方行列について，固有多項式が行列式を用いて同様に定義される．これについては A セメスターで述べる.

問 4.6. $v=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$ とすると $f(v)=px^2+qxy+ry^2$ が成り立つとする．また，対称行列 G を

$$\forall\, v\in\mathbb{R}^2\ {}^tvGv$$

が成り立つように定める．

1) G を求めよ（G は対称であることに注意せよ．また，G は f の表現行列である）．また，$\operatorname{tr} G$ と $\det G$ を求めよ．
2) G の固有多項式を求めよ．変数は何でも良いが，以下では t とする．
3) G の固有多項式の根（固有多項式を φ とすれば，$\varphi(t) = 0$ の解）は実数であることを示せ．

   一般に，$A \in M_n(K)$ について，A の固有多項式の根で，K に属する物を A の**固有値**と呼ぶ．固有値に関しては A セメスターで述べる．
4) G の固有多項式の根を $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ とする．また，$\alpha \geq \beta$ とする．
   a) $\alpha > 0, \beta > 0$ が成り立つことは $\operatorname{tr} A > 0,\ \det A > 0$ が成り立つことと同値であることを示せ．
   b) $\alpha > 0, \beta < 0$ が成り立つことは $\det A > 0$ が成り立つことと同値であることを示せ．
   c) $\alpha < 0, \beta < 0$ が成り立つことは $\operatorname{tr} A < 0,\ \det A > 0$ が成り立つことと同値であることを示せ．
   d) $\alpha > 0 = \beta$ が成り立つことは $\operatorname{tr} A > 0,\ \det A = 0$ が成り立つことと同値であることを示せ．
   e) $0 = \alpha > \beta$ が成り立つことは $\operatorname{tr} A < 0,\ \det A = 0$ が成り立つことと同値であることを示せ．
   f) $\alpha = \beta = 0$ が成り立つことは $\operatorname{tr} A = 0,\ \det A = 0$ が成り立つことと同値であることを示せ．
5) 上の場合分けと，資料集の場合分けを比較せよ．

二次形式のグラフの形状と，G（二次形式の表現行列）の固有値は上のように深く関係する．これは二変数に限ったことではない．このことについては A セメスターで扱う．

（以上）

対称双線型形式と二次形式

詳しくは A セメスターで扱うが，既にある程度の用意はできているので簡単に述べる．なお「数理科学基礎」の範囲からは逸脱する．「お話」と思って気楽に読んでおくと良い（もし外の「普通の」部分が怪しければそちらを優先すること）．

内積からノルム（の 2 乗）が定まり，また，ノルムの 2 乗から内積を復元することができた．一般の二次形式に関しても同様の事が成り立つ．まず内積に当たる物を定める．

定義 4.7. $f\colon K^n \times K^n \to K$ が K^n 上の**双線型形式**あるいは**双一次形式**であるとは以下が成り立つことを言う．

1) $w \in K^n$ を固定し，$g\colon K^n \to K$ を

$$g(v) = f(v, w)$$

により定めると g は線型写像である．

2) $v \in K^n$ を固定し，$h\colon K^n \to K$ を

$$h(w) = f(v, w)$$

により定めると h は線型写像である．

さらに f が次の条件を満たすとき，f は**対称双線型形式**あるいは**対称双一次形式**であるという．即ち，

$$\forall\, v, w \in K^n,\ f(w, v) = f(v, w)$$

が成り立つ．

例 4.8. 1) $\mathbb{R}^n$ のユークリッド内積は対称双線型形式である．

※ $\mathbb{R}^n$ のユークリッド内積を**ユークリッド計量（Euclidean metric）**とも呼ぶ．

2) $v = {}^t(x_0\ x_1\ \cdots\ x_n),\ w = {}^t(y_0\ y_1\ \cdots\ y_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ について

$$g(v, w) = -x_0y_0 + \sum_{i=1}^{n} x_iy_i$$

と定め**ローレンツ（Lorenz）計量**，より詳しくは標準ローレンツ計量と呼ぶ．ローレンツ計量は双線型形式である．

※ 符号を逆にして $g(v, w) = x_0y_0 - \sum_{i=1}^{n} x_iy_i$ をローレンツ計量とすることもある．

3) $f\colon K^2 \times K^2 \to K$ を

$$f(v_1, v_2) = \det(v_1\ v_2)$$

により定める．ここで，$(v_1\ v_2)$ は $v_1, v_2 \in K^2$ を横に並べて得られる $M_2(K)$ の元である．すると f は双線型形式であるが，

$$f(v_2, v_1) = -f(v_1, v_2)$$

が成り立ち，対称ではない．このように v_1, v_2 を入れ替えると「$-$」が付く場合，**交代双線型形式**と呼ぶ．一般の n に関しても，行列式から $f\colon \overbrace{K^n \times \cdots \times K^n}^{n\text{ 個}} \to K$ が

$$f(v_1, \ldots, v_n) = \det(v_1\ \cdots\ v_n)$$

により定まる．これは各成分について線型写像であるので**多重線型形式（多重一次形式）**と呼ばれる．また，v_i と v_j $(i \neq j)$ の入れ替えについて「$-$」が現れるので**交代的**と呼ばれる．まとめて**交代多重線型形式（交代多重一次形式）**とも呼ぶ．詳しくは後日扱う．

4) $f, g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ をそれぞれ

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = x + y,$$
$$g\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = 2x + y$$

により定め，$h\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を

$$h(v, w) = f(v)g(w)$$

により定める．h は双線型形式であるが，対称でも交代的でもない．

補題 4.9. $f\colon K^n \times K^n \to K$ を双線型形式とする．

1) このとき，$A \in M_n(K)$ が一意的に存在して

$$\forall\, v, w \in K^n,\ f(v, w) = {}^t vAw$$

が成り立つ．このような A を f の**表現行列**と呼ぶ[2]．

2) f が対称であるならば，A は対称行列である．

証明. 1) の略証（詳細は自分で詰めること）．

$a_{ij} = f(e_i, e_j)$ と置く．$A = (a_{ij})$ とすれば A は f の表現行列である．また，表現行列 $A = (a_{ij})$ は $a_{ij} = f(e_i, e_j)$ を満たさないといけないので一意的である．

2) の証明.

$A = (a_{ij})$ を表現行列とすれば，$a_{ji} = f(e_j, e_i) = f(e_i, e_j) = a_{ij}$ が成り立つ．従って A は対称行列である． □

[2]詳しく言えば，表現行列は K^n の（順序付き）基底を定めることにより定まる．ここでの表現行列は基底 $(e_1, \ldots e_n)$ に関する物である．

問 4.10. 1) $\mathbb{R}^{n+1}$ のローレンツ計量を対称双線型形式とみなしたときのの表現行列を求めよ．

2) det を例 4.8 のように K^2 上の交代線型形式とみなす．このとき det の表現行列を求めよ．

定義 4.11. $f\colon K^n \times K^n \to K$ を双線型形式とする．$g\colon K^n \to K$ を

$$g(v) = f(v, v)$$

により定め，**f により定まる K^n 上の二次形式**と呼ぶ．

例 4.12. 1) $\langle\cdot|\cdot\rangle$ を $\mathbb{R}^n$ のユークリッド内積とする．$\langle\cdot|\cdot\rangle$ により定まるノルムは $\langle\cdot|\cdot\rangle$ により定まる $\mathbb{R}^n$ 上の二次形式である．

2) $\langle\cdot|\cdot\rangle$ を $\mathbb{R}^{n+1}$ のローレンツ計量とする．$v = {}^t(x_0\ x_1\ \cdots\ x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ について

$$\|v\| = -x_0^2 + \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

と定めれば $\|\cdot\|$ はローレンツ計量の定める二次形式である．

注．ローレンツ計量の定める二次形式については

$$\forall\, v \in \mathbb{R}^{n+1},\ \|v\| \geq 0$$

が成り立たないので，これはノルムではない．ただ，この二次形式は特別なので**ローレンツノルム**と呼ぶことがある．

ユークリッド内積について，それが定めるノルムから内積を復元できたが，同様の事が対称双一次形式とそれが定める二次形式についても成り立つ[3]．

補題 4.13. $f\colon K^n \times K^n \to K$ を双線型形式とし，g を f により定まる K^n 上の二次形式（定義 4.11）とする．

1) g は確かに二次形式である．

2) f が対称であれば $f(v, w) = \dfrac{g(v + w) - g(v) - g(w)}{2}$ が成り立つ．

証明．1) の証明．$e_1, \ldots, e_n$ を基本ベクトルとし，$f_{ij} = f(e_i, e_j)$ と置く．さて，$v = {}^t(x_1\ \cdots\ x_n)$ とすると，$v = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ が成り立つから，

$$g(v) = f(v, v) = f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} x_j e_j\right) = \sum_{i,j} x_i x_j f(e_i, e_j) = \sum_{i,j} f_{ij} x_i x_j$$

が成り立つ．定義により g は二次形式である．

[3]体の標数が 2 で無ければ，である．「標数？」という場合には気にしなくて良い（が，この手のことに興味があれば調べてみよ．英語は characteristic である）．

2) の証明．$\mathbb{R}^n$ の内積の場合と同様である．実際，

$$\begin{aligned} g(v+w) &= f(v+w, v+w) \\ &= f(v,v)+f(v,w)+f(w,v)+f(w,w) \\ &= g(v)+2f(v,w)+g(w) \end{aligned}$$

が成り立つ．これを整理すれば主張にある式を得る．f の対称性を用いていることに注意せよ． $\square$

定理 4.14. $g\colon K^n \to K$ を二次形式とする．このとき，対称双線型形式 $f\colon K^n \times K^n \to K$ であって

$$\forall v \in K^n,\ g(v) = f(v,v)$$

が成り立つ物が一意的に存在する．また，f の表現行列は g の表現行列である．

証明. $A \in M_n(K)$ を g の表現行列で，対称行列であるような物とする．$f\colon K^n \times K^n \to K$ を $f(v,w) = {}^t vAw$ により定めれば，f は対称双線型形式で $g(v) = f(v,v)$ を満たす．補題 4.13 の 2) によりこのような f は一意的である． $\square$

系 4.15. g を K^n 上の二次形式とする．このとき，

$$\forall v \in K^n,\ g(v) = {}^t vAv$$

が成り立つような対称行列は一意的である．言い換えれば，対称行列の範囲では g の表現行列は一意的である．

証明. B を g の表現行列であって，対称行列とする．$f\colon K^n \times K^n \to K$ を $f(v,w) = {}^t vBw$ により定めれば，f は対称双線型形式であって，$g(v) = f(v,v)$ を満たし，さらに f の表現行列は B に等しい．特に B を A としても同様の事が成り立つ．$g(v) = f(v,v)$ を満たすような対称双線型形式は一意的である．また，対称双線型形式の表現行列も一意的であるから $B = A$ が成り立つ． $\square$

（とりあえずここまで）