２０１６年度数理科学基礎 II（理 I 6,7,9,10 組向け，足助担当）演習問題 3　2016/4/22（金）

以下では $K = \mathbb{R}$ あるいは $K = \mathbb{C}$ とする．

定義 3.1. V を集合とし，V には加法とスカラー倍が定まっているとする．これらの演算が以下の条件（**線型空間の公理**）を満たすとき，V を ***K*-線型空間**，K 上の線型空間などと呼ぶ．

$v, w, u \in V, \lambda, \mu \in K$ とすると次が成り立つ．

1) $(v+w)+u = v+(w+u)$．和を取る順序が大事でないときにはこの等しい元を $v+w+u$ で表す．
2) $v + w = w + v$.
3) $o \in V$ が存在して，任意の $v \in V$ について $v + o = o + v = v$ が成り立つ．
4) $-v \in V$ が存在して，3) の o について $v + (-v) = (-v) + v = o$ が成り立つ．
5) $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$.
6) $\lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w$.
7) $\lambda(\mu v) = (\lambda\mu)v$．積を取る順序が大事でないときにはこの等しい元を $\lambda\mu v$ で表す．
8) $1v = v$.

3) の o は V の**零ベクトル**と呼ばれ，4) の $-v$ は v の逆元と呼ばれる．

零ベクトルは一意的であることが示せる．また，$v \in V$ を定めれば $-v$ も一意的であることが示せる．

注. 公理を暗記する必要はない．要は V の元同士の和と，スカラー倍（定数倍）が「当たり前の」演算規則を満たす，ということである．一方,「当たり前」の演算規則が満たされない例として行列の積が挙げられる．$n > 1$ し，$A, B \in M_n(K)$ とすると $AB, BA \in M_n(K)$ であるが，一般には $AB = BA$ は成り立たない（和と積で話は異なると言えば異なるが，公理の 1) に相当することが成り立たない）．

問 3.2. $V = K[x]$ とする．多項式の和，定数倍に関して $K[x]$ は線型空間であることを示せ（定義 3.1 の性質が成り立つことを示せ）．
※ 難しくはないが，面倒くさい．

問 3.3. $-v$ が（v に対して）一意的であることを認めた上で，$-v = (-1)v$ が成り立つことを示せ．即ち，v の逆元は v の -1 倍に等しいことを示せ．

問 3.4. $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ とする．$\{v_1, v_2, v_3\}$ は $\mathbb{R}^3$ の基底であることを示せ．

問 3.5. $n=2$ とし，$\mathbb{R}^2$ を考える．$v_1=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$，$v_2=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$ とする．また，$A=(v_1\ v_2)=\begin{pmatrix}x_1&y_1\\x_2&y_2\end{pmatrix}$ と置く．

1) $\det A=0$ が成り立つことと，$v_1/\!/v_2$ が成り立つことは同値であることを示せ．
2) $\det A\neq 0$ とする．$B=\dfrac{1}{\det A}\begin{pmatrix}y_2&-y_1\\-x_2&x_1\end{pmatrix}$ と置くと $AB=BA=E_2$ が成り立つことを示せ．
3) $\det A\neq 0$ が成り立つことと，$\{v_1,v_2\}$ が $\mathbb{R}^2$ の基底であることは同値であることを示せ．

問 3.6. 標準的なユークリッド内積は定義 3.1 の意味でユークリッド内積であることを示せ．

問 3.7. $G=\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}$ とし，$a,b\in\mathbb{R}$ かつ $a,b\neq 0$ とする．$v,w\in\mathbb{R}^2$ について

$$\langle v\,|\,w\rangle={}^t v\,Gw$$

と置く，$\langle\cdot|\cdot\rangle$ が $\mathbb{R}^2$ の内積である（定義 3.1 の条件を満たす）ことと，$a>0$ かつ $b>0$ が成り立つことは同値であることを示せ．
※ ** 余裕があれば，どんな $G\in M_2(\mathbb{R})$ について上の式で内積が定まるか考えてみよ．$n=2$ であればそれほど難しくはない．

問 3.8. $\mathbb{R}^n$ の標準的なノルムについて，次が成り立つことを示せ．

1) $\|v\|\geq 0$.
2) $\|v+w\|\leq\|v\|+\|w\|$（三角不等式）.
3) $\|\lambda v\|=|\lambda|\,\|v\|$.

問 3.9**. $a=(a_1\ \cdots\ a_n)\in M_{1,n}(\mathbb{R})$ とし，$a\neq o$ とする．以下の 1) を認めて 2) を示せ．また，2) を認めて 1) を示せ．

1) $V=\{v\in\mathbb{R}^n\,|\,av=0\}$ とすると，$u_1,\ldots,u_{n-1}\in\mathbb{R}^n$ が存在して

$$V=\{v\in\mathbb{R}^n\,|\,\exists 1\,\lambda_1,\ldots,\lambda_{n-1}\in\mathbb{R},\ v=\lambda_1u_1+\cdots+\lambda_{n-1}u_{n-1}\}$$

が成り立つ．ここで「$\exists 1$」は「唯一つ存在する」ことを意味する．

2) $B_1=(b_{11}\ \cdots\ b_{1n}),\ldots,B_{n-1}=(b_{n-1,1}\ \cdots\ b_{n-1,n})\in M_{1,n}(\mathbb{R})$ が存在して

$$W=\{v\in\mathbb{R}^n\,|\,B_1v=\cdots=B_{n-1}v=o\}$$

と置くと，次が成り立つ．

a) $B=\begin{pmatrix}B_1\\\vdots\\B_{n-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_{11}&\cdots&b_{1n}\\\vdots&&\vdots\\b_{n-1,1}&\cdots&b_{n-1,n}\end{pmatrix}\in M_{n-1,n}(\mathbb{R})$ とすると

$$W=\{v\in\mathbb{R}^n\,|\,Bv=o\}$$

が成り立つ.

b) $W = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \exists t \in \mathbb{R},\ v = ta\}$ が成り立つ.

以下では $\mathbb{R}^2$ 内の直線の交わりや $\mathbb{R}^3$ 内の平面の交わりについて扱う．いずれも超平面であることに注意せよ．なお，以下の問題には全て $*$ を付けてあるが,「線型代数学」ではこれらを更に一般化した物を扱うので，難しくても解くことを強く勧める.

まず $\mathbb{R}^2$ 内の直線について考える.

問 3.10 ***.** $i = 1, 2$ について $(a_{i1}\ a_{i2}) \in M_{1,2}(\mathbb{R}),\ b_i \in \mathbb{R}$ とし，$(a_{i1}\ a_{i2}) \neq O_{12} = (0\ 0)$ とする．また，$L_i = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + b_i = 0 \right\}$ を $\mathbb{R}^2$ 内の直線とする.

1) L_1 と L_2 の交わり $L_1 \cap L_2$ について，以下のいずれかが成り立つことを確かめよ．図形的（幾何的）に考察すれば良い.

a) $L_1 \cap L_2 = \varnothing$.

b) $\exists p \in \mathbb{R}^2,\ L_1 \cap L_2 = \{p\}$.

c) $L_1 \cap L_2 = L_1 = L_2$.

2) $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ と置く．1) の各場合について，$\det A$ が取り得る値を調べよ.

3) A の行列式の取り得る値だけでは 1) の場合を全て分類することはできない．そこで行列 $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{pmatrix}$ を考えることにする.

i) $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ とすると

$$\begin{aligned} L_1 \cap L_2 &= \{x \in \mathbb{R}^2 \mid Ax = -b\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \widetilde{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \right\} \end{aligned}$$

が成り立つことを示せ.

ii) a) の場合には，$\widetilde{A}$ の第 1 行（第 2 行）に第 2 行（第 1 行）の何倍かを加えて，必要なら第 1 行と第 2 行を入れ替えると $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ 0 & 0 & b_2 \end{pmatrix}$，但し $(a_{11}\ a_{12}) \neq (0\ 0),\ b_2 \neq 0$，の形の行列が得られることを示せ．また，$\det A = 0$ であることを示せ.

iii) c) の場合には，$\widetilde{A}$ の第 1 行（第 2 行）に第 2 行（第 1 行）の何倍かを加えて，必要なら第 1 行と第 2 行を入れ替えると $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，但し $(a_{11}\ a_{12}) \neq (0\ 0)$，の形の行列が得られることを示せ．また，$\det A = 0$ であることを示せ.

iv) b) の場合には，$\det A \neq 0$ であることを示せ.

v) i) から iv) のそれぞれについて，逆も成り立つことを示せ.

従って $\widetilde{A}$（とその一部である A）を用いれば，$L_1 \cap L_2$ の形が分かる.

3 本以上の直線についても，$\widetilde{A}$ にあたる行列を考えると同様に交わりの分類ができる．興味があれば考えてみよ（交わりの分類は複雑になる．例えば交わりが空集合である場合でも，二直線が平行で，残りの直線が平行でない場合，三つの直線のどの二つも平行で無いが,「三角形」のような図形を描いて，三直線の交わりは空である場合がある．これらを整理して考えるためには行列の**ランク**（階数）が必要である．これについては S2 タームで述べる）．

問 3.11 ***.** $i = 1, 2$ について $(a_{i1}\ a_{i2}\ a_{i3}) \in M_{1,3}(\mathbb{R})$, $b_i \in \mathbb{R}$ とし，$(a_{i1}\ a_{i2}\ a_{i3}) \neq O_{13} = (0\ 0\ 0)$ とする．また，$L_i = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + b_i = 0 \right\}$ を $\mathbb{R}^3$ 内の平面とする．

1) $L_1 \cap L_2$ について，以下のいずれかが成り立つことを確かめよ．図形的（幾何的）に考察すれば良い．
   a) $L_1 \cap L_2 = \varnothing$.
   b) $L_1 \cap L_2$ は $\mathbb{R}^3$ 内のある直線に等しい．
   c) $L_1 \cap L_2 = L_1 = L_2$.
2) 問 3.10 を参考にして，行列 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \end{pmatrix}$ を用いて $L_1 \cap L_2$ の形を判別する方法を考えよ．

問 3.12 **(行列のランクについて既に学んでいる学生向け)**.**

$i = 1, 2, 3$ について $(a_{i1}\ a_{i2}\ a_{i3}) \in M_{1,3}(\mathbb{R})$, $b_i \in \mathbb{R}$ とし，$(a_{i1}\ a_{i2}\ a_{i3}) \neq O_{13} = (0\ 0\ 0)$ とする．また，$L_i = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + b_i = 0 \right\}$ を $\mathbb{R}^3$ 内の平面とする．

1) $L_1 \cap L_2 \cap L_3$ について，以下のいずれかが成り立つことを確かめよ．図形的（幾何的）に考察すれば良い．
   a) $L_1 \cap L_2 \cap L_3 = \varnothing$.
   b) $L_1 \cap L_2 \cap L_3$ は $\mathbb{R}^3$ 内のある直線に等しい．
   c) $L_1 \cap L_2 \cap L_3 = L_1 = L_2 = L_3$.
2) 問 3.10 を参考にして，行列 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{pmatrix}$ を用いて $L_1 \cap L_2 \cap L_3$ の形を判別する方法を考えよ．

（以上）