２０１６年度線型代数学（理Ｉ 6,7,9,10 組向け，足助担当）　演習問題　2017/1/6（金）

問 17.1. 以下に挙げる函数 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ について，原点における微分について $Df(o) = o$ が成り立つことを確かめよ．また，ヘシアン $Hf(o)$ が非退化であるかどうか調べよ．ヘシアンが非退化である場合，原点が極小点，極大点，鞍点（極小点でも極大点でもない）のいずれであるか判定せよ．

1) $f(x_1, x_2) = x_1^2 + ax_2^2$，但し $a \in \mathbb{R}$.
2) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2x_3$.
3) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^3$（指数に注意せよ）.
4) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_1^4 + x_2^2 + x_3^2 + x_3^3$.
5) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 e^{x_2+x_3} - x_2^2 \cos x_3 + x_3^2 \log(2 + x_1^2)$.

問 17.2. $A \in \mathrm{SO}_3$ とする．

1) A は 1 を固有値に持つことを示せ.
2) $v \in \mathbb{R}^3$, $v \neq o$ を 1 に属する A の固有値とする．また，$\{u_1, u_2, v\}$ を $\mathbb{R}^3$ の正規直交基底であって，$P = (u_1\ u_2\ v)$ とすると $P \in \mathrm{SO}_3$ であるようなものとする．このとき，$\theta \in \mathbb{R}$ が存在して $A(u_1\ u_2) = (u_1\ u_2) \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ が成り立つことを示せ．また，$P^{-1}AP$ を求めよ.
   ※ $(u_1\ u_2)$ のサイズに注意せよ.
3) 2) の θ と A の固有値の関係を簡潔に述べよ.
4) 2) の u_1, u_2, v, θ を用いて，$f(x) = Ax$ により与えられる $\mathbb{R}^3$ の線型変換を図示せよ.

問 17.3. $A \in \mathrm{O}_3$ とし，$A \notin \mathrm{SO}_3$ とする．

1) $\det A = -1$ が成り立つことを示せ.
2) A は -1 を固有値に持つことを示せ.
3) $v \in \mathbb{R}^3$, $v \neq o$ を -1 に属する A の固有値とする．また，$\{u_1, u_2, v\}$ を $\mathbb{R}^3$ の正規直交基底であって，$P = (u_1\ u_2\ v)$ とすると $P \in \mathrm{SO}_3$ であるようなものとする．このとき，$\theta \in \mathbb{R}$ が存在して $A(u_1\ u_2) = (u_1\ u_2) \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ が成り立つことを示せ．また，$P^{-1}AP$ を求めよ.
   ※ $(u_1\ u_2)$ のサイズに注意せよ.
4) 3) の θ と A の固有値の関係を簡潔に述べよ.
5) 3) の u_1, u_2, v, θ を用いて，$f(x) = Ax$ により与えられる $\mathbb{R}^3$ の線型変換を図示せよ.

以下については第 16 回と第 8 回も参照のこと．これらはベクトル解析や物理などに良く現れる．

問 17.4. $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$, $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \in K^3$ について

$$v \times u = \begin{pmatrix} \det \begin{pmatrix} v_2 & u_2 \\ v_3 & v_3 \end{pmatrix} \\ -\det \begin{pmatrix} v_1 & u_1 \\ v_3 & v_3 \end{pmatrix} \\ \det \begin{pmatrix} v_1 & u_1 \\ v_2 & v_2 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \tag{17.5}$$

が成り立つことを示せ．

注 17.6. 1) 式 (17.5) を $v \times u$ の定義とすることも多い．

2) $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \in K^3$ とし，$A = (v\ u\ w)$ と置く．A の (i,j)-余因子を $\widetilde{a}_{ij}$ とすると $v \times u = \begin{pmatrix} a_{1,3} \\ a_{2,3} \\ a_{3,3} \end{pmatrix}$ が成り立つ．

問 17.7. $\{e_1, e_2, e_3\}$ を K^3 の標準的な基底とする．$v = v_1 e_1 + v_2 e_2 + v_3 e_3$ などが成り立つことに注意して $v \wedge u$ を $e_2 \wedge e_3$，$e_3 \wedge e_1$，$e_1 \wedge e_2$ の線型結合で表し，係数を $v \times u$ と比較せよ．

問 17.8. (x_1, x_2, x_3) を $\mathbb{R}^3$ の標準的な座標とし，$\nabla = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix}$ と置く．$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$ を $\mathbb{R}^3$ 上の C^∞ 級の $\mathbb{R}^3$-値函数とする．$\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ を $\mathbb{R}^3$ の標準的なユークリッド計量とするとき，$\langle \nabla \mid f \rangle$ と $\nabla \times f$ を形式的に（ベクトルを無理矢理 ∇ や f で置き換えて）計算せよ．

これ以降は Jordan 標準形に関する問である．大事なことであるが，期末試験の範囲からは除く[1]．

問 17.9. 次の行列の Jordan 標準形を求めよ（複素数の範囲で考えよ）．

1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 　　2) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

[1]試験範囲と被る部分はある．これらについては勿論試験範囲である．一方，Jordan 標準形特有の事柄については範囲とはしないいうことである．いずれにせよ，知っていれば損はしないはずである．

3) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & 0 & 1 & 0 \\ & & & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & & -a_2 & -a_1 \end{pmatrix}$，ただし $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$.

ヒント：多項式 $x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$ がどのように因数分解されるかが大事である.

問 17.10. $J = \bigoplus_{i=1}^{\delta_0} J_1(\lambda) \oplus \bigoplus_{i=1}^{\delta_1} J_2(\lambda) \oplus \cdots \oplus \bigoplus_{i=1}^{\delta_{m-1}} J_m(\lambda)$ とする.

1) J^m, $m > 0$ を求めよ.

2) $\exp tJ = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}(tJ)^k = E_n + tJ + \frac{1}{2}(tJ)^2 + \cdots$ を求めよ.

3) $n = \delta_0 + 2\delta_1 + \cdots + m\delta_{m-1}$ とする（J のサイズを $n \times n$ とする）．変数と t とするとき，$\mathbb{R}^n$-値函数 f についての微分方程式

$$\frac{df}{dt}(t) = Jf(t)$$

の，初期条件（拘束条件）$f(0) = c \in \mathbb{R}^n$ をみたす解を具体的に求めよ.

問 17.11. 1) $J \in M_n(\mathbb{C})$ を Jordan 標準形であるような行列とする．この時, $\exists P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, ${}^tJ = P^{-1}JP$ が成り立つことを示せ.

2) $A \in M_n(\mathbb{C})$ とすると，$\exists P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, ${}^tA = P^{-1}AP$ が成り立つことを示せ.

ここでは次を認める.

定理 17.12. $A \in M_n(\mathbb{C})$ とする．このとき，$f \in \mathbb{C}[t]$ であって，次の性質を持つものが一意的に存在する.

i) $f(A) = O_n$ が成り立つ.

ii) f は 0 ではなく，また，1) の性質を持つようなもののうち，次数が最も低い.

iii) f の最高次の項の係数は 1 に等しい（このような多項式を**モニック**であるという）.

定義 17.13. 定理 17.12 のような f を A の**最小多項式**と呼ぶ.

g を A の固有多項式とすれば $g(A) = O_n$ が成り立つから，最小多項式は存在する[2]．一意的であることの証明もそれほど難しくはないが，省略する.

問 17.14. 次の行列の最小多項式と固有多項式を求めよ.

1) O_n　　2) E_n　　3) $J_n(\lambda)$

[2] $M_n(\mathbb{C})$ が $\mathbb{C}$ 上有限次元であることを用いても示せる.

4) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & 0 & 1 & 0 \\ & & & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & & -a_2 & -a_1 \end{pmatrix}$，ただし $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$

問 17.15 ***.** $A \in M_n(\mathbb{C})$ とする．A が（$\mathbb{C}$ 上）対角化可能であることと，A の最小多項式が重根を持たないことは同値であることを示せ．

問 17.16. $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ とする．次の主張が正しければ証明し，そうでなければ反例を（一つ）挙げよ．

1) A と B の Jordan 標準形が等しければ A と B の最小多項式は等しい．
2) A と B の最小多項式が等しければ A と B の Jordan 標準形は等しい．
3) A と B の Jordan 標準形が等しければ A と B の固有多項式は等しい．
4) A と B の固有多項式が等しければ A と B の Jordan 標準形は等しい．
5) A と B の最小多項式と固有多項式が等しければ A と B の Jordan 標準形は等しい．

問 17.17. $X, Y \in M_n(\mathbb{C})$ について，$\langle X \mid Y \rangle = \operatorname{tr} X^* Y$ と置く．$\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ は $M_n(\mathbb{C})$ のエルミート計量であることを示せ．また，正規直交基底を一組求めよ．

問 17.18. $M_n(\mathbb{C})$ には問 17.17 によりエルミート計量を入れる．$A \in M_n(\mathbb{C})$ とし，A の固有値は λ のみであるとする．

1) $\forall \epsilon > 0,\ \exists B \in M_n(\mathbb{C}),\ \|A - B\| < \epsilon,\ B$ は対角化可能，が成り立つことを示せ．
   ヒント：例えば，より強い主張

   $\forall \epsilon > 0,\ \exists B \in M_n(\mathbb{C}),\ \|A - B\| < \epsilon,\ B$ の固有値は全て異なる
   （いずれの固有値についても重複度が 1 である）

   を示すのが簡単である．
2) $n > 1$ とする．$\forall \epsilon > 0,\ \exists B \in M_n(\mathbb{C}),\ \|A - B\| < \epsilon,\ B$ は対角化不可能，が成り立つことを示せ．

（以上）