２０１６年度線型代数学（理Ｉ 6,7,9,10 組向け，足助担当）　演習問題　2016/12/16（金）

問 16.1. 講義の定義 5.1.1 における A は，二次形式（エルミート二次形式）f の，$\mathbb{R}^n$（$\mathbb{C}^n$）の標準的な順序付き基底に関する f の表現行列であることを示せ．

問 16.2 ***.** $f, g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を線型写像とし，$\mathbb{R}^n$ の標準的な順序付き基底に関する f, g の表現行列（実際には行ベクトルである）を a, b とする．

1) $\varphi\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を $\varphi(v, w) = f(v)g(w)$ により定めると，φ は双線型写像であることを示せ．
2) $\varphi'\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を $\varphi'(v, w) = f(v)g(w) + g(v)f(w)$ により定めると，φ' は対称双線型写像であることを示せ．また，$\mathbb{R}^n$ の標準的な順序付き基底に関する φ' の表現行列を a, b あるいはそれらの成分を用いて表せ．
3) $\psi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を $\psi(v) = f(v)g(v)$ により定める．ψ は $\mathbb{R}^n$ 上の二次形式であることを示せ．また，$\mathbb{R}^n$ の標準的な順序付き基底に関する ψ の表現行列を a, b あるいはそれらの成分を用いて表せ．

問 16.2 は**テンソル積**と呼ばれるものの例である．一般の実，複素線型空間についても類似のことを考えることができるが，ここでは割愛する．

問 16.3. 1) V を n 次元実線型空間とする．g を V 上の対称双線型形式とし，f を g に対応する V 上の二次形式とする．g が非退化であることと，$\operatorname{sgn} f = (p, q)$ とするとき $p + q = n$ が成り立つことは同値であることを示せ．

2) 複素線型空間上のエルミート二次形式についても同様のことが成り立つことを示せ．

問 16.4. $\mathbb{R}^m$ には標準的なユークリッド計量（と，それから定まるノルム）が入っているとする．$v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^m$ とし，$A = (v_1 \ \cdots \ v_n)$ と置く．また，$X = {}^tAA,\ Y = A{}^tA$ と置く．

1) $\lambda \in \mathbb{R}^n$ について，${}^t\lambda X\lambda = \|A\lambda\|^2$ が成り立つことを示せ．
2) $v_1, \ldots, v_n$ が線型独立であることと，X が正則であることは同値であることを示せ．また，$n > m$ とすると Y は正則でないことを示せ．
3) X, Y の固有値は非負の実数であることを示せ．
4) $v_1, \ldots, v_n$ は線型独立であるとし，$W = \langle v_1, \ldots, v_n \rangle$ と置く．また，$\{u_{n+1}, \ldots, u_m\}$ を $W^\perp$ の正規直交基底とする．$\widetilde{A} = (v_1 \ \cdots \ v_n \ u_{n+1} \ \cdots \ u_m)$ と置けば $\det X = (\det \widetilde{A})^2$ が成り立つことを示せ．
   ヒント：${}^t\widetilde{A}\widetilde{A}$ を考えてみよ．
5) 4) で特に $n = m - 1$ の場合を考える．この時には条件をみたす u_m は丁度二つ存在することを示せ．また，これらを u, u' とすれば $u' = -u$ が成り立つことを示せ．

以下については第 8 回（定義 8.3 以降）も参照のこと．

問 16.5 *. $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ を $\mathbb{R}^n$ の標準的なユークリッド計量とし，$\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ により定まるノルムを $\|\cdot\|$ とする．$v_1, \dots, v_{n-1} \in \mathbb{R}^n$ とし，$w \in \mathbb{R}^n$ を条件

i) $1 \leq i \leq n-1$ について $\langle v_i \mid w \rangle = 0$ が成り立つ．

ii) $A = (v_1 \ \cdots \ v_{n-1}) \in M_{n,n-1}(\mathbb{R})$ とすると $\|w\|^2 = \det {}^t\!AA$ が成り立つ．

iii) $\det(v_1 \ \cdots \ v_{n-1} \ w) \geq 0$ が成り立つ．

により定める（定めたい）．

1) $v_1, \dots, v_{n-1}$ が線型従属であるならば $w = o$ が成り立つ（条件をみたす w は o しか存在しない）ことを示せ．

2) $v_1, \dots, v_{n-1}$ は線型独立だとする．

   a) $W = \langle v_1, \dots, v_{n-1} \rangle^\perp$ は 1 次元であることを示せ．

   b) $\det {}^t\!AA > 0$ が成り立つことを示せ．

   c) 条件 i) から iii) をみたす w が一意的に存在することを示せ．

定義 16.6. 問 16.5 により定まる w を $v_1, \dots, v_{n-1}$ の**外積**と呼ぶ．$n = 3$ の時には w をしばしば $v_1 \times v_2$ で表す．なお，条件 iii) の代わりに条件

iii') $\det(w \ v_1 \ \cdots \ v_{n-1}) \geq 0$ が成り立つ．

を用いることがある．

問 16.7. $n = 3$ とする．$v_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$，$v_2 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ とするとき，$v_1 \times v_2$ を具体的に求めよ．また，$v_2 \times v_1 = -v_1 \times v_2$ が成り立つことを示せ．

問 16.8 ****(問 16.5 も参照のこと).** $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ を $\mathbb{R}^n$ の標準的なユークリッド計量とし，$\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ により定まるノルムを $\|\cdot\|$ とする．

1) $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を線型写像とする．このとき，$w \in \mathbb{R}^n$ であって，

$$\forall\, v \in \mathbb{R}^n,\ f(v) = \langle w \mid v \rangle$$

   が成り立つものが一意的に存在することを示せ．以下ではこの w を $\varphi(f)$ で表す．

   ※ $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ が一般の計量（非退化双線型形式）であっても同様のことが成り立つ．φ を考えることはテンソル解析に現れる**添字の上げ下げ**と関連する．

2) $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}$ への線型写像全体のなす線型空間を V とすると，$\varphi \colon V \to \mathbb{R}^n$ は線型同型写像であることを示せ（なお，V は $\mathbb{R}^n$ の双対空間である）．

3) $v_1, \dots, v_{n-1} \in \mathbb{R}^n$ とし，$f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を

$$f(v) = \det(v_1 \ \cdots \ v_{n-1} \ v)$$

   により定める．すると $\varphi(f)$ は $v_1, \dots, v_{n-1}$ の外積に等しいことを示せ．

（以上）