２０１６年度線型代数学（理Ｉ 6,7,9,10 組向け，足助担当）　演習問題 １５　2016/12/9（金）
'17/1/11：問 15.10 と問 15.20 を修正.

問 15.1. $W, W_1, W_2 \subset V$ を部分線型空間とする.

1) $(W^\perp)^\perp = W$ が成り立つことを示せ[1].
2) $(W_1 + W_2)^\perp = W_1^\perp \cap W_2^\perp$ が成り立つことを示せ.
3) $(W_1 \cap W_2)^\perp = W_1^\perp + W_2^\perp$ が成り立つことを示せ.

問 15.2 *****(今解けなくて全く構わない).**
$L_2(\mathbb{N}) = \left\{ (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid a_n \in \mathbb{R},\ \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 < +\infty \right\}$ と置く．$L_2(\mathbb{N})$ は線型空間であって，また，$a = (a_n), b = (b_n) \in L_2(\mathbb{N})$ について

$$\langle a \mid b \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n$$

と置くと $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ は $L_2(\mathbb{N})$ のユークリッド計量であることを示すことができる[2].

1) $m \in \mathbb{N}$ とする．$V = V_m = \{(a_n) \in L_2(\mathbb{N}) \mid a_0 = \cdots = a_m = 0\}$ と置く．この時 $V^\perp = \{(a_n) \in L_2(\mathbb{N}) \mid n > m$ ならば $a_n = 0\}$ が成り立つことを示せ.
2) $V = \{(a_n) \in L_2(\mathbb{N}) \mid N \in \mathbb{N}$ が存在して $n \geq N$ ならば $a_n = 0\}$ と置く．この時，$L_2(\mathbb{N})$ の部分線型空間 U であって，$V + U = L_2(\mathbb{N})$ かつ $V \perp U$ が成り立つものは存在しないことを示せ.

従って，素朴な意味では $V^\perp$ が存在する場合と存在しない場合がある.

問 15.3. $A \in M_n(\mathbb{C})$ が正規行列であるとは，$A^*A = AA^*$ が成り立つことであった.

1) （実）対称行列，エルミート行列は正規行列であることを示せ.
2) ${}^tA = -A$ をみたす $A \in M_n(\mathbb{R})$ を（実）**歪対称行列**と呼ぶ．また，$A^* = -A$ をみたす $A \in M_n(\mathbb{C})$ を**歪エルミート行列**と呼ぶ．これらは正規行列であることを示せ.
3) ${}^tA = A$ をみたす $A \in M_n(\mathbb{C})$ を**複素対称行列**，${}^tA = -A$ をみたす $A \in M_n(\mathbb{C})$ を**複素歪対称行列**と呼ぶ．これらは必ずしも正規ではないことを示せ.
4) $\mathrm{O}_n, \mathrm{SO}_n, \mathrm{U}_n, \mathrm{SU}_n$ の元は正規であることを示せ.
5) $\mathrm{O}_{1,1}$ の元は正規であることを示せ．また，$\mathrm{O}_{1,n}$，$n > 1$ の元は必ずしも正規でないことを示せ.
6*) $\mathrm{SU}_{1,1}$ の元は正規であることを示せ．また，$\mathrm{SU}_{1,n}$，$n > 1$ の元や $\mathrm{U}_{1,n}$ の元は必ずしも正規でないことを示せ.

[1] $\dim V = +\infty$ の場合には示せない（反例がいくらでもある）.
[2] いずれも微分積分学の範囲で証明できることであるが，ここでは省略する．興味があれば Hölder の不等式などについて調べてみること.

ヒント：$\mathrm{SU}_{1,1}$ の元は具体的に形が決定できる（問 14.11 も参照のこと）．$\mathrm{U}_{1,1}$ の元も具体的に形が決定できて，正規でないことが分かる．一つの方針としては，$A \in \mathrm{U}_{1,1}$ のとき，$\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$ が存在して $\lambda A \in \mathrm{SU}_{1,1}$ が成り立つことをまず示す．$\mathrm{SU}_{1,1}$ の元の形が分かっていれば，$\mathrm{U}_{1,1}$ の元の形が分かる．$n > 1$ の場合は 5) と $\mathrm{SO}_{1,n} = \mathrm{SU}_{1,n} \cap M_n(\mathbb{R})$ が成り立つことを用いれば容易である．

問 15.4. $A \in M_n(K)$ とする．

1) $K = \mathbb{R}$ とする．$A_+ = \dfrac{1}{2}(A + {}^tA)$, $A_- = \dfrac{1}{2}(A - {}^tA)$ と置く．A_+ は対称行列，A_- は歪対称行列であって，また，$A = A_+ + A_-$ が成り立つことを示せ.
2) $K = \mathbb{C}$ とする．$A_+ = \dfrac{1}{2}(A + A^*)$, $A_- = \dfrac{1}{2}(A - A^*)$ と置く．A_+ はエルミート行列，A_- は歪エルミート行列であって，また，$A = A_+ + A_-$ が成り立つことを示せ.
3) $A \in M_n(\mathbb{R})$ とする．$A = B + C$，B は対称行列，C は歪対称行列，と表す方法は一意的であることを示せ．また，$A \in M_n(\mathbb{C})$ とすると，$A = B + C$，B はエルミート行列，C は歪エルミート行列，と表す方法は一意的であることを示せ.

問 15.5. $A \in M_n(K)$ とすると以下は同値であることを示せ.

1) A は正規行列である.
2) $A = A_+ + A_-$，A_+ は対称（エルミート）行列，A_- は歪対称（歪エルミート）行列，と表すと $A_+A_- = A_-A_+$ が成り立つ.

問 15.6. $\mathbb{C}^n$ に標準的なエルミート計量を入れる．また，$A \in M_n(\mathbb{C})$ とする．以下は同値であることを示せ.

1) A は正規行列である.
2) A の固有ベクトルから成る $\mathbb{C}^n$ の正規直交基底が存在する.
3) $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ を A の相異なる固有値全体とし，V_i を λ_i に属する A の固有空間とすると，$\mathbb{C}^n = V_1 \oplus \cdots \oplus V_r$（直交直和）が成り立つ.
4) A は対角化可能であって，A の異なる固有値に属する固有空間は直交する.

問 15.7. 以下に挙げる V 上の二次形式（エルミート二次形式）f の標準形と符号および，f に対応する対称双線型形式（対称半双線型形式）を求めよ.

1) $V = \mathbb{R}^3$ とし，$f(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 - 8x_1x_2 + x_2^2 - 2x_2x_3 + x_3^2$ とする.
2) $V = \mathbb{R}^4$ とし，$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 4x_1^2 - 8x_1x_2 + x_2^2 - 2x_2x_3 + x_3^2$ とする.
3) $V = \mathbb{C}^3$ とし，$f(x_1, x_2, x_3) = 4|x_1|^2 - 4\overline{x_1}x_2 - 4\overline{x_2}x_1 + |x_2|^2 - \overline{x_2}x_3 - \overline{x_3}x_2 + |x_3|^2$ とする.

問 15.8 **. f を $\mathbb{R}^n$ 上の非退化交代双線型形式とする．即ち，

i) f は非退化な双線型形式であって，

ii) f は**交代的**である，即ち $v \in \mathbb{R}^n$ について $f(v,v)=0$ が成り立つ（従って対称双線型形式の場合とは異なり，対応する二次形式は常に 0 になってしまって意味が付かない）

とする．また，A を標準的な順序付き基底に関する f の表現行列とする．

1) $n=2$ とする．$f(v,w)=\det(v\ w)$ とすると f は $\mathbb{R}^2$ 上の非退化交代双線型形式であることを示せ．
2) A は（実）歪対称行列である，即ち $A+{}^tA=0$ が成り立つことを示せ．
3) 一般に（f の表現行列であるかどうかには関係なく），実歪対称行列の固有値は純虚数であることを示せ．また，λ を固有値とすると，$\overline{\lambda}$ も固有値であって，重複度は等しいことを示せ．
4) $P \in \mathrm{SU}_n$ が存在して $P^{-1}AP$ は対角行列であることを示せ．
5) n は偶数であることを示せ．また，$n=2m$ とし，$J=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ とすると，$Q \in \mathrm{SO}_n$ と $\lambda_1,\dots,\lambda_m \neq 0$ が存在して $Q^{-1}AQ=\lambda_1 J\oplus\cdots\oplus\lambda_m J$ が成り立つことを示せ．但し，$\lambda_1,\dots,\lambda_m$ には重複を許す．

定義 15.9.

$$\begin{aligned}
\mathfrak{gl}_n(K) &= M_n(K),\\
\mathfrak{sl}_n(K) &= \{A \in M_n(K) \mid \operatorname{tr} A = 0\},\\
\mathfrak{o}_n &= \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid {}^tA = -A\},\\
\mathfrak{so}_n &= \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid {}^tA = -A,\ \operatorname{tr} A = 0\},\\
\mathfrak{u}_n &= \{A \in M_n(\mathbb{C}) \mid A^* = -A\},\\
\mathfrak{su}_n &= \{A \in M_n(\mathbb{C}) \mid A^* = -A,\ \operatorname{tr} A = 0\}
\end{aligned}$$

と置く．

問 15.10. 1) $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}), \mathfrak{sl}_n(\mathbb{R}), \mathfrak{o}_n, \mathfrak{so}_n$ のそれぞれについて，$\mathbb{R}$-線型空間であることを示し，次元を求めよ．

2) $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}), \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ は $\mathbb{C}$-線型空間であることを示し，次元を求めよ．
3) $\mathfrak{u}_n, \mathfrak{su}_n$ はいずれも $\mathbb{R}$-線型空間であるが $\mathbb{C}$-線型空間でないことを示せ．また，$\mathbb{R}$ 上の次元を求めよ．

問 15.11. $\mathfrak{so}_n = \mathfrak{o}_n$ が成り立つことを示せ．
※ 次元を比較しても示せるが，直接示す方が簡潔である．

※ この事実を踏まえて，$\mathfrak{so}_n = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid {}^tA = -A\}$ と最初から定めることもある．

定義 15.12. $A, B \in M_n(K)$ について $[A,B]=AB-BA$ と定め，A,B の **Lie bracket** あるいは Lie 括弧積と呼ぶ．

問 15.13. Lie bracket について以下が成り立つことを示せ．

1) Lie bracket は双線型である．
2) Lie bracket は交代的である（即ち，$[A, A] = O_n$ が成り立つ）．
3) $[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = O_n$ が成り立つ（Jacobi indentity，Jacobi 恒等式）．

問 15.14. $\mathfrak{g}$ を $\mathfrak{gl}_n(K)$，$\mathfrak{sl}_n(K)$，$\mathfrak{o}_n(= \mathfrak{so}_n)$，$\mathfrak{u}_n$，$\mathfrak{su}_n$，$\{A \in M_n(K) \mid A$ は上三角行列 $\}$，$\{A \in M_n(K) \mid A$ は上三角行列であって，対角成分は全て 0 に等しい $\}$ のいずれかとすると，$\forall\, X, Y \in \mathfrak{g}$，$[X, Y] \in \mathfrak{g}$ が成り立つことを示せ．
※ このこと（＋形式的ないくつかの性質）が成り立つことを指して $\mathfrak{g}$ は **Lie 環**であると言う．

定義 15.15 (再掲)**.** $A \in M_n(K)$ について $\exp A$ を

$$\exp A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} A^k$$

により定める．但し，任意の $A \in M_n(K)$ について $A^0 = E_n$ と定める．

問 15.16 (問 11.16 も参照のこと)**.** $A, B \in M_n(K)$ について $\langle A \mid B \rangle = \operatorname{tr} A^* B$ と置く．

1) $A = (a_{ij})$ とすると，$|a_{ij}| \leq \|A\|$ が成り立つことを示せ．
2) $\|AB\| \leq \|A\|\,\|B\|$ が成り立つことを示せ．
   ※ Schwarz の不等式を用いることを考えてみよ．1) はあまり関係ない．

問 15.17. 以下が成り立つことを示せ．
※ 形式的な計算による「証明」は数理科学基礎で問うた．ここでは厳密な証明を考えよ．微分積分学の進度によっては年度末近くまで解けないかも知れない．

1) $A \in M_n(K)$ について，$\exp A$ は定まることを示せ．つまり，$\displaystyle\sum_{k=0}^{l} \frac{1}{k!} A^k$ の各成分は $l \to +\infty$ とすると収束することを示せ．
2) $A, B \in M_n(K)$ とする．$AB = BA$ ならば $\exp(A+B) = (\exp A)(\exp B) = (\exp B)(\exp A)$ が成り立つ．
3) $A \in M_n(K)$ とすると $\exp A \in \mathrm{GL}_n(K)$ であって，$(\exp A)^{-1} = \exp(-A)$ が成り立つ．
4) $A \in M_n(K)$ とすると $\exp {}^t\!A = {}^t(\exp A)$ が成り立つ．
5) $A \in M_n(\mathbb{C})$ とすると $\exp A^* = (\exp A)^*$ が成り立つ．

問 15.18. $A \in M_n(K)$ とする．

1) A の相異なる固有値を $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$，$\lambda_k$ の重複度を α_k（$1 \leq k \leq r$）とすると，$\exp A$ の相異なる固有値は $\exp \lambda_1, \ldots, \exp \lambda_r$ であって，$\exp \lambda_k$ の重複度は α_k（$1 \leq k \leq r$）であることを示せ．但し，$\exp \lambda_i = \exp \lambda_j$ が成り立つ時にはこれらはまとめて考えて，重複度も合算することにする．

2) $A \in M_n(K)$ について，$\det \exp A = e^{\operatorname{tr} A} (= \exp \operatorname{tr} A)$ が成り立つことを示せ.

3) A が K 上対角化可能ならば $\exp A$ も K 上対角化可能であることを示せ.

※ 逆も成り立つが，現時点で証明するのはやや難しい.

問 15.19. $\mathfrak{g}, G \subset M_n(K)$ を以下のように定めると $X \in \mathfrak{g}$ について $\exp X \in G$ が成り立つことを示せ.

1) $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n(K),\ G = \mathrm{GL}_n(K)$.
2) $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n(K),\ G = \mathrm{SL}_n(K)$.
3) $\mathfrak{g} = \mathfrak{o}_n,\ G = \mathrm{O}_n$.
4) $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_n,\ G = \mathrm{SO}_n$.

※ 3), 4) に関しては $\mathfrak{o}_n = \mathfrak{so}_n$ であることに注意せよ.

5) $\mathfrak{g} = \mathfrak{u}_n,\ G = \mathrm{U}_n$.
6) $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}_n,\ G = \mathrm{SU}_n$.
7) $\mathfrak{g} = \{A \in M_n(K) \mid A$ は上三角行列$\},\ G = \{A \in M_n(K) \mid A$ は正則な上三角行列$\}$.
8) $\mathfrak{g} = \{A \in M_n(K) \mid A$ は上三角行列であって，対角成分は全て 0 に等しい$\}$,
$G = \{A \in M_n(K) \mid A$ は上三角行列であって，対角成分は全て 1 に等しい$\}$.
9) $\mathfrak{g} = \{A \in M_n(K) \mid A$ は対称行列$\},\ G = \{A \in M_n(K) \mid A$ は正則な対称行列$\}$.
10) $\mathfrak{g} = \{A \in M_n(\mathbb{C}) \mid A$ はエルミート行列$\}$,
$G = \{A \in M_n(\mathbb{C}) \mid A$ は正則なエルミート行列$\}$

※ 9),10) 以外は $\mathfrak{g}$ は **Lie 環**，G は **Lie 群**と呼ばれるものの例で，更に，これらは $\mathfrak{g}$ は G の Lie 環，と呼ばれる関係にある．9), 10) については exp で対応するという意味では関係は同様であるが，$\mathfrak{g}$ は Lie 環ではなく，また，G も Lie 群ではない.

問 15.20 **. $n > 1$ とする．$\lambda \in \mathbb{C},\ \lambda \neq 0$ について，$N_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & & & \\ & \lambda & 1 & 0 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & 1 & 0 \\ & & & & \lambda & 1 \\ & & & & & \lambda \end{pmatrix}$ と置く.

1) $\exp X = N_n(\lambda)$ が成り立つような $X \in M_n(\mathbb{C})$ を一つ求めよ.
2) $\lambda \in \mathbb{R},\ \lambda > 0$ とする．$\exp X = N_n(\lambda)$ が成り立つような $X \in M_n(\mathbb{R})$ を一つ求めよ.
3) $X = (x_{ij}) \in M_2(\mathbb{R})$ について $\exp X = N_2(-1) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ が成り立つとする.
   a) $\operatorname{tr} X = x_{11} + x_{22} = 0$ が成り立つこと及び，X の固有値は実数ではあり得ないことを示せ.
   b) X が a) に挙げた二条件をみたすならば X は $\mathbb{C}$ 上対角化可能であることを示せ.
   c) $\exp X = N_2(-1)$ をみたす $X \in M_2(\mathbb{R})$ は存在しないことを示せ.

※ 1) とは異なることが起きている．$n > 2$ の場合は（ものすごく）難しくなるのでここでは触れない．

問 15.21 ****.** 1) $\exp\colon \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ は単射ではないが全射であることを示せ．

ヒント：Jordan 標準形を用いるのが簡単である．

2) a) $\exp\colon \mathfrak{gl}_1(\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}_1(\mathbb{R})$ は単射であるが全射でないことを示せ．

b) $\exp\colon \mathfrak{gl}_2(\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ は単射でも全射でもないことを示せ．

ヒント：単射性については回転を表す行列の場合を考えてみよ．また，全射性については $\det \exp A$ を考えてみよ．

このように，行列の指数函数の全射性については，実数の範囲で話を済ませようとすると一般にはややこしくなる．一方で，いくつかの場合には全射であることが比較的容易に示せる．

問 15.22 ****.** 1) 問 15.19 の 3), 4), 5), 6) の場合について，$\exp\colon \mathfrak{g} \to G$ が全射であることを示せ．

ヒント：5), 6) の場合には対角化を考えればよい．3), 4) の場合には単なる対角化ではなく，問 10.5 で調べたような，実数の範囲での扱いを考える必要がある．

2) 問 15.19 の 7) の場合について，$\exp\colon \mathfrak{g} \to G$ が全射であることを示せ．

ヒント：これは地道に考えるのが多分一番簡単である．

注 15.23. 正則行列の対数函数 log も考えることができるが，指数函数 exp と比べて気をつけないといけない点が多いのでここでは省略する．

（以上）