２０１６年度線型代数学（理 I 6,7,9,10 組向け，足助担当）　演習問題 14　2016/12/2（金）
※ 講義において様々な用語が現れているが，これを盲目的に覚える必要はない．講義では逆になりがちであるが，現実的には多くの場合

1) 調べたいことが現れる．
2) 調べているうちに良く見かける性質が観察される．
3) 2) のような性質に名前を便宜的に付ける．

という順番で話が進む．名前ばかり覚えて，その性質や，それが現れる状況を知らないのは本末転倒である．

定義 14.1 ***.** $\mathscr{V} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ を V の基底とする．V^* の元の組 $\mathscr{V}^* = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ であって，条件

$$\alpha_i(v_j) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

をみたすものを $\mathscr{V}$ に**双対**な V^* の基底と呼ぶ（実際に基底であることは問 14.2）．

ここでは混乱を避けるため記号として α_i を用いているが，v_i^* などを用いることも多い．

問 14.2 ***.** $\mathscr{V} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ を V の基底とする．定義 14.1 でいうところの「$\mathscr{V}$ に双対な V^* の基底」が一意的に存在することを以下に従って示せ．

1) $\alpha_i \colon V \to K$ は定義 14.1 にある条件で一意的に定まることを示せ．従って，$\mathscr{V}^*$ は基底であるかどうかはさて措き，一意的に定まる．
2) $1 \leq i \leq n$ について，$f_i \colon V \to K$ を $v \in V$ を $v = \sum_{k=1}^n \lambda_k v_k$ と表して $f_i(v) = \lambda_i$ と定めると，f_i は線型写像であることを示せ．従って $f_i \in V^*$ である．
3) 1) で定めた f_i について，$f_i(v_j) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j \end{cases}$ が成り立つことを示せ．また，$f_i = \alpha_i$ が成り立つことを示せ．
4) $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ について $\sum_{k=1}^n \lambda_k \alpha_k = 0$ が成り立つとする．即ち，任意の $v \in V$ について $\sum_{k=1}^n \lambda_k \alpha_k(v) = 0$ が成り立つとする．$v = v_1, \ldots, v_n$ と置くことにより，$\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$ が成り立つことを示せ．従って $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ は線型独立である．
5) $f \in V^*$ とする．即ち，$f \colon V \to K$ を K-線型写像とする．$\lambda_k = f(v_k)$ と置き，$g = \sum_{k=1}^n \lambda_k \alpha_k$ と定めると $f = g$ が成り立つことを示せ．従って $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ は V^* を生成する．よって 4) と合わせて，$\mathscr{V}^* = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ は V^* の基底である．

ここからは g を V 上の対称双線型形式（$K = \mathbb{R}$ の場合）あるいは対称半双線型形式（$K = \mathbb{C}$ の場合）とする[1]．

---

[1] V は有限次元とする．無限次元の場合は理論的にも応用的にも大事であるが，難しすぎてまだ述べられない．

問 14.3 **(問 13.9 の続き．難しければ $V = K^n$ として考えよ)．$\varphi\colon V \to V^*$ を，

$$\varphi(v)(w) = g(v, w)$$

により定める．見やすさのために $\varphi(v)$ を φ_v で表す．$\varphi_v(w) = \varphi(v)(w) = g(v, w)$ である．$\mathscr{V} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ を V の基底とすると，$\{\varphi_{v_1}, \ldots, \varphi_{v_n}\}$ は V^* の基底であることを示せ．
ヒント：例えば問 14.2 を参考にすると良い．

定義 14.4 ***.** V を K-線型空間とし，$g(\cdot\,,\cdot)$ を V の非退化対称双線型形式（$K = \mathbb{R}$）あるいは非退化対称半双線型形式（$K = \mathbb{C}$）とする．$\mathscr{V} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ を V の基底とするとき，V の基底 $\mathscr{V}_g^* = \{v_1^*, \ldots, v_n^*\}$ であって，条件

$$g(v_i^*, v_j) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

をみたすものを g に関して $\mathscr{V}$ に**双対**な（V の）基底と呼ぶ．
※ $\mathscr{V}_g^*$ はここでの記号である．一般的な記号は存在しないと思われる．

注 14.5 ***.** 名前は似ているが，$\mathscr{V}$ に双対な V^* の基底とは異なることに注意せよ．実際，g に関する $\mathscr{V}$ に双対な基底は V の基底であって，$\mathscr{V}$ に双対な基底は V^* の基底である．

問 14.6 ***.** $\mathscr{V} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ を V の基底とし，A を V に関する g の表現行列とする．$A \in \mathrm{GL}_n(K)$ が成り立つ（講義の補題 4.7.16[2]）．

1) $w_1, \ldots, w_n \in V$ を条件 $(w_1, \ldots, w_n) = (v_1, \ldots, v_n)A^{-1}$ により定めると，$\{w_1, \ldots, w_n\}$ は g に関して V に双対な基底であることを示せ．
2) $\{w_1', \ldots, w_n'\}$ も $\mathscr{V}$ に双対な基底とすると，$w_k' = w_k$ が $1 \leq k \leq n$ について成り立つことを示せ．即ち，g に関して $\mathscr{V}$ に双対な基底は一意的である．
3) ここでは順序付き基底を考える．$\mathscr{V}_g^* = (v_1, \ldots, v_n)(= \mathscr{V})$ が成り立つことと，$\mathscr{V}$ が g に関する順序付き正規直交基底であることは同値であることを示せ．

問 14.7 ****.** $\varphi\colon V \to V^*$ を問 14.3 と同様に定める．$\mathscr{V} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ を V の基底とし，$\mathscr{V}^* = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ を $\mathscr{V}$ に双対な V^* の基底とする．φ は全単射なので，$w_i \in V,\ 1 \leq i \leq n$ を $w_i = \varphi^{-1}(\alpha_i)$ により定める．このとき，$\{w_1, \ldots, w_n\}$ は g に関して $\mathscr{V}$ に双対な V の基底であることを示せ．

問 14.8. g を $\mathbb{R}^{n+1}$ の標準的なユークリッド計量，g_L を $\mathbb{R}^{n+1}$ の標準的なローレンツ計量とする．

1) $\mathscr{E} = \{e_0, e_1, \ldots, e_n\}$ を $\mathbb{R}^{n+1}$ の標準的な基底とする．$\mathscr{E}$ の g に関する双対基底および g_L に関する双対基底をそれぞれ求めよ．
2) $v_0 = e_0,\ v_1 = e_0 + e_1, \ldots, v_n = e_0 + e_n$ と置く．$\mathscr{V} = \{v_0, v_1, \ldots, v_n\}$ とするとき，$\mathscr{V}$ の g に関する双対基底および g_L に関する双対基底をそれぞれ求めよ．

[2]番号は多少ずれるかも知れない．

注 14.9. $\mathscr{V}$ を V の基底とし，$\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ を V の計量（非退化な対称（半）双線型形式）とする[3]．$v \in V$ について，$\langle v \mid$（**ブラベクトル**と呼ばれる）と $\mid v \rangle$（**ケットベクトル**と呼ばれる）には物理的，特に量子力学的な意味が付く[4]．まず，平たく言えば $\mid v \rangle$ は力学的な状態に対応する．状態全体が線型空間（$= V$）であるということは，考えている状態が重ね合わせの原理を満たすということに対応する（量子論的には状態は波動（波動函数）の重ね合わせ，即ち線型結合で表される）．このことを踏まえて，$v_1, \ldots, v_n \in V$ を「基本的な状態」とする．これは数学的には $\{v_1, \ldots, v_n\}$ が V の正規直交基底である，ということである．さて，$\langle v \mid$ について考えるために次のことに注意する．即ち，

$$\sum_{i=1}^{n} \mid v_i \rangle \langle v_i \mid = \mathrm{id}_V$$

が成り立つ．実際，$v \in V$ について，$v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$ と表すと $\lambda_i = \langle v_i \mid v \rangle$ が成り立つ（講義の補題 4.3.2）．v と $\mid v \rangle$ は同じ物だと考えているので

$$\mid v \rangle = \lambda_1 \mid v_1 \rangle + \cdots + \lambda_n \mid v_n \rangle$$

が成り立つ（ただし $\lambda_i = \langle v_i \mid v \rangle$）．よって，

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \mid v_i \rangle \langle v_i \mid \right) \mid v \rangle = \sum_{i=1}^{n} \mid v_i \rangle \langle v_i \mid v \rangle = v$$

が成り立つ．

注意． $\langle w \mid$ と $\mid v \rangle$ の順序は大事である．例えば $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \langle v_i \mid v_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} 1 = n$ である．

このように，$\langle v_i \mid$ は $v \in V$（あるいは $\mid v \rangle \in V$）について，v の v_i 成分（正確には，v を $v_1, \ldots, v_n$ の線型結合として表したときの v_i の係数）を与えるものである．また，$\mid v_i \rangle \langle v_i \mid$ は Kv_i への正射影である．$w \in V$ が一般の場合にも $\langle w \mid$ や $\mid w \rangle \langle w \mid$ には同様の意味が付く．この意味で，$\langle w \mid$ も状態としては w に対応すると考える（なお，w の大きさ $\sqrt{\langle w \mid w \rangle}$ に応じて多少式を書き換える必要が生じる）．このように考えると $w \in V$ について $\langle w \mid$ は $\mid v \rangle$ と組み合わせることにより K の元を与える写像であると考えるのが自然である．実際には写像 $\langle w \mid$ は線型であるので，$\langle w \mid \in V^*$（V の双対空間）が成り立つ．特に，「基本的な状態」（V の正規直交基底）$\mathscr{V} = \{v_1, \ldots, v_n\} = \{\mid v_1 \rangle, \ldots, \mid v_n \rangle\}$ に対応して，$\{\langle v_1 \mid, \ldots, \langle v_n \mid\}$ を考えることができる．これは定義 14.1 の条件を満たすので $\mathscr{V}$ に双対な V^* の基底である．一方，g に関して $\mathscr{V}$ に双対な V の基底 $\{v_1^*, \ldots, v_n^*\}$ も考えることができる．問 14.6 の 3) により，$(v_1^*, \ldots, v_n^*) = (v_1, \ldots, v_n)$ なので，$\langle v_i^* \mid = \langle v_i \mid$ が成り立つ．すると二つの写像 $f_1, f_2 \colon V \to V^*$ を考えることができる．一つは $\mid v \rangle \in V$ を $\mid v \rangle = \lambda_1 \mid v_1 \rangle + \cdots + \lambda_n \mid v_n \rangle$ と表しておいて

$$f_1(v) = \lambda_1 \langle v_1 \mid + \cdots + \lambda_n \langle v_n \mid$$

[3]一連の問では g であった．

[4]以下に述べることは物理的には非常に大雑把かつやや不正確である．正確なことは後日専門的に学ぶと思う．なお，量子力学に関して言えば，「生成演算子」「消滅演算子」が出てくるあたりである．

とするものである．もう一つは $\langle v\,| = \langle \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n\,|$ と考えて

$$f_2(v) = \overline{\lambda_1}\langle v_1\,| + \cdots + \overline{\lambda_n}\langle v_n\,|$$

とするものである．これらはいずれも自然な対応に見えるし，状況（目的）によってはその通りであるが，式を見れば分かるように，$K = \mathbb{C}$ の時には異なる（整合的でない）．実際，前者は線型であって，後者は共役線型である．また，ここでは正規直交基底を用いているが，単なる基底を用いるとその分のずれも生じる（例えば $\{\langle v_1\,|, \ldots, \langle v_n\,|\}$ と V^* の $\mathscr{V}$ に双対な基底は異なる）．これは代表的な例であるが，一般に $K = \mathbb{C}$ の場合にエルミート計量と双対空間を両方とも用いようとすると，このような線型，共役線型のずれの問題が生じることが多い．

問 14.10. $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle_L$ を $\mathbb{R}^{n+1}$ のローレンツ計量とし，$J = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & E_n \end{pmatrix}$ と置く．また，

$$\mathrm{O}_{1,n} = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid {}^t\!AJA = J\}$$

と置く．$\mathrm{O}_{1,n}$ は**ローレンツ群**などと呼ばれる（特に $n = 3$ の場合を指すことがある）．また，$\mathrm{O}_{1,n}$ を $\mathrm{O}(1, n)$ などで表わすことがある．

1) $\mathrm{O}_{1,n} \subset \mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{R})$ が成り立つことを示せ．
2) $A \in \mathrm{O}_{1,n}$ とする．$v, w \in \mathbb{R}^{n+1}$ について $\langle Av \mid Aw \rangle_L = \langle v \mid w \rangle_L$ が成り立つことを示せ．この意味で A はローレンツ計量に関する $\mathbb{R}^{n+1}$ の等長変換を定める．
3*) 形式的に $J = E_{n+1}$ と置くと，$\mathrm{O}_{1,n}$ の代わりに O_{n+1} が得られることを確かめよ．
4) $\mathbb{C}^{n+1}$ のローレンツ計量を考える場合，**複素ローレンツ群**（特に $n = 3$ の場合を指すことがある）

$$\mathrm{U}_{1,n} = \{A \in M_n(\mathbb{C}) \mid A^*JA = J\}$$

を考えると 1) から 3) と同様のことが成り立つことを示せ．
5) $\mathrm{SO}_{1,n} = \mathrm{SU}_{1,n} \cap M_n(\mathbb{R})$ が成り立つことを示せ．
6) $\mathrm{O}_{1,n}, \mathrm{U}_{1,n}$ は群であることを示せ．具体的には $G = \mathrm{O}_{1,n}$ あるいは $G = \mathrm{U}_{1,n}$ とすると G は
   a) $A, B \in G$ ならば $AB \in G$ が成り立つ[5]．
   b) $E_n \in G$ が成り立つ．
   c) $A \in G$ ならば，$A^{-1} \in G$ である[6]．

   をみたすことを示せ．

問 14.11. $\mathrm{SO}_{1,1} = \left\{ \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\}$ が成り立つことを示せ．

---

[5]本来は，更に $(AB)C = A(BC)$ が成り立つことを示す必要があるが，今の場合には自明である．

[6]本来は，さらに $AA^{-1} = A^{-1}A = E_n$ が成り立つことを示すべきであるが，今の場合には自明である．

問 14.12 *($*$ を付けているが，理論的にも応用的にも大事なことである)．行列の成分を縦に並び替える（順序は適当に決める）ことにより，$M_n(K) = K^{n^2}$ とみなす．すると $M_n(K)$ に通常の意味での距離が定まる．

1) $\mathrm{U}_n, \mathrm{SU}_n, \mathrm{O}_n, \mathrm{SO}_n$ は（$M_n(\mathbb{C})$ あるいは $M_n(\mathbb{R})$ の）有界閉集合であることを示せ．
2) $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}), \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ は開集合であって，有界ではないことを示せ．
3) $\mathrm{SL}_n(K) = \{A \in \mathrm{GL}_n(K) \mid \det A = 1\}$ と置く．$\mathrm{SL}_n(\mathbb{C}), \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ は閉集合であるが，有界ではないことを示せ．
4) $\mathrm{SU}_{1,n} = \mathrm{U}_{1,n} \cap \mathrm{SL}_{n+1}(\mathbb{C}), \mathrm{SO}_{1,n} = \mathrm{O}_{1,n} \cap \mathrm{SL}_{n+1}(\mathbb{R})$ と置く．$\mathrm{U}_{1,n}, \mathrm{SU}_{1,n}, \mathrm{O}_{1,n}, \mathrm{SO}_{1,n}$ は閉集合であるが，有界ではないことを示せ．

問 14.13 **． 1) $\mathrm{SO}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} \cos 2\pi\theta & -\sin 2\pi\theta \\ \sin 2\pi\theta & \cos 2\pi\theta \end{pmatrix} \middle| \, \theta \in \mathbb{R} \right\}$ が成り立つことを確かめよ．

2) $f\colon S^1 \to \mathbb{R}$ を C^∞ 級とする（実際にはもっと一般の函数で良い）．$[f] \in \mathbb{R}$ を $[f] = \displaystyle\int_{\theta\in[0,1]} f(\cos 2\pi\theta, \sin 2\pi\theta) d\theta$ により定めると，任意の $p \in S^1$ について $[f] = \displaystyle\int_{\theta\in[0,1]} f(g(\theta)p) d\theta$ が成り立つことを示せ．ここで，$g(\theta) = \begin{pmatrix} \cos 2\pi\theta & -\sin 2\pi\theta \\ \sin 2\pi\theta & \cos 2\pi\theta \end{pmatrix}$ である．
3) $g \in \mathrm{SO}_2$ について，$g^*f\colon S^1 \to \mathbb{R}$ を $g^*f(p) = f(gp)$ により定める．このとき，$[g^*f] = [f]$ が成り立つことを示せ．

※ 実際には $[f]$ は f の平均値である．

問 14.14 **．$H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -x^2 + y^2 = 1\} = \{p \in \mathbb{R}^2 \mid \langle p \mid p \rangle_L = 1\}$ とする．

1) H を図示せよ．
2) $p \in H,\ A \in \mathrm{O}_{1,1}$ ならば $Ap \in H$ が成り立つことを示せ．
3) $p, q \in H$ とすると $A \in \mathrm{O}_{1,1}$ が存在して $q = Ap$ が成り立つことを示せ．また，$A \in \mathrm{SO}_{1,1}$ となるための条件を幾何的に（図示できる形で）与えよ．
4) 問 14.13 の 2) の真似をしようとしても，例えば $f(x, y) = y$ とすると（すくなくとも素直には）うまく行かないことを確かめよ．従って 3) もうまく行かない．

（以上）