２０１６年度線型代数学（理Ｉ 6,7,9,10 組向け，足助担当）　演習問題 ９　2016/10/14（金）

問 9.1 *. $A \in M_n(K)$（ただし $n \geq 2$）とすると

$$\widetilde{\widetilde{A}} = (\det A)^{n-2} A$$

が成り立つ．このことを以下の方針に沿って示せ．

1) $n = 2$ の時は直接確かめる．以下では $n > 2$ とする．
2) $A \in \mathrm{GL}_n(K)$ の場合には $\widetilde{A} = (\det A)A^{-1}$ が成り立つことを用いて左辺を計算する．
3) $A \notin \mathrm{GL}_n(K)$ とする．このとき，
   a) $A = (a_1 \ \cdots \ a_n)$ と列ベクトルを用いて表わす．このとき，$a_1, \ldots, a_n$ は線型従属であることを示せ．
   ※ これまでに示した定理などをうまく使えばほとんど何も示さずに済ませることができる．
   b) ある k, $1 \leq k \leq n$，について a_k は $a_1, \ldots, a_{k-1}, a_{k+1}, \ldots, a_n$ の線型結合として表わされることを示せ．
   c) b) において $k = 1$ と仮定する．すると，$\lambda_2, \ldots, \lambda_n \in K$ が存在して $a_1 = \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_n a_n$ が成り立つ．A の (i, j)-余因子を $\widetilde{a}_{ij}$ で表わすことにすると，$j > 1$ について
   $$\widetilde{a}_{ij} = -\lambda_j \widetilde{a}_{i1}$$
   が成り立つことを示せ．また，k が一般の場合にはどうなるか考えよ．
   d) b) において $k = 1$ と仮定する．このとき $\widetilde{\widetilde{A}} = O_n$ が成り立つことを示せ．また，k が一般の場合にも同じことが成り立つことを示せ．

問 9.2. λ を $A \in M_n(K)$ の固有値とし，V_λ を λ に属する A の固有空間とすると

$$V_\lambda = \{\lambda \text{ に属する } A \text{ の固有ベクトル}\} \cup \{o\}$$

が成り立つことを確かめよ．

問 9.3. 講義の命題 3.2.4 において，v_i 達の順序を入れ替えることにより，λ_i 達の順序を自由に入れ替えることが出来ることを示せ（当然 P は変わる）．

問 9.4. $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ とする．

1) $\mathbb{R}$ 上（実数の範囲で）$R(\theta)$ が対角化できる θ を求め，それぞれの場合について $R(\theta)$ を $\mathbb{R}$ 上対角化せよ．即ち，$P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ であって $P^{-1}R(\theta)P$ が対角行列であるような物を一つ求め，また，その P について $P^{-1}R(\theta)P$ を求めよ．
2) $\mathbb{C}$ 上で $R(\theta)$ を対角化せよ．即ち，$P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ であって $P^{-1}R(\theta)P$ が対角行列であるような物を一つ求め，また，その P について $P^{-1}R(\theta)P$ を求めよ．

問 9.5. $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ と置く．

1) $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ と考える．このとき，それぞれの行列について，固有値と重複度を全て求めよ．また，各々の固有値に属する固有ベクトルを一つずつ求めよ．
2) $A, B \in M_2(\mathbb{C})$ と考える．このとき，それぞれの行列について，固有値と重複度を全て求めよ．また，各々の固有値に属する固有ベクトルを一つずつ求めよ．

ヒント：結局は 1) の答えは 2) の答えになっている．理由を考えてみよ．

問 9.6. $A \in M_n(K)$, $P \in \mathrm{GL}_n(K)$ とする．

1) A の固有値全体と，$P^{-1}AP$ の固有値全体は重複度も含めて同一であることを示せ．
2) $v \in K^n$ を A の固有値 λ に属する固有ベクトルとする．$P^{-1}v$ は $P^{-1}AP$ の固有値 λ に属する固有ベクトルであることを示せ．
3) A が K 上対角化可能であることと，$P^{-1}AP$ が K 上対角化可能であることは同値であることを示せ．

問 9.7. A が以下のそれぞれの場合について，

i) $K = \mathbb{C}$ の場合，
ii) $K = \mathbb{R}$ の場合

のそれぞれについて，講義の定理 3.2.16 に現れる λ_k，α_k や V_k が具体的にはどのようなものであって，何が成り立ち，何が成り立たないか調べよ．

1) $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
3) $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

（以上）