２０１６年度線型代数学（理 I 6,7,9,10 組向け，足助担当）　演習問題 3　　2016/6/24（金）

問 3.1 (問 2.5 も参照のこと).　1) V を K-線型空間とし，$v_1, \ldots, v_r \in V$ とする．$v_1, \ldots, v_r$ が V を K 上生成することと，$f\colon K^r \to V$ を

$$f(\lambda) = (v_1 \ \cdots \ v_r)\lambda$$

により定めたとき，f が全射であることは同値であることを示せ．

2) $A \in M_{m,n}(K)$ とし，$A = (a_1 \ \cdots \ a_n)$ と列ベクトルを用いて表す．$f\colon K^n \to K^m$ を $f(v) = Av$ により定めると，$\operatorname{Im} f = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ が成り立つことを示せ．

問 3.2. V, W を K-線型空間とし，V は有限生成とする．

1) 全射な線型写像 $f\colon V \to W$ が存在すれば W は有限生成であることを示せ．
2) $V \cong W$ が成り立つならば W も有限生成であることを示せ．

問 3.3. V, W を K-線型空間，$f\colon V \to W$ を K-線型写像とする．

1) f は単射とする．$v_1, \ldots, v_r \in V$ が線型独立であるならば $f(v_1), \ldots, f(v_r) \in W$ は線型独立であることを示せ．
2) f は全射とする．$v_1, \ldots, v_r \in V$ が V を生成するならば，$f(v_1), \ldots, f(v_r) \in W$ は W を生成することを示せ．
3) f を K-線型同型写像とする．$\{v_1, \ldots, v_n\}$ が V の基底であるならば $\{f(v_1), \ldots, f(v_n)\}$ は W の基底であることを示せ．

問 3.4. 以下の主張を確かめよ．

1) K^n は n 次元である．$n \neq m$ ならば $K^n \not\cong K^m$ である．
2) $M_{m,n}(K)$ は mn 次元である．
3) $\mathbb{C}^n$ は $\mathbb{C}$ 上 n 次元である．$\mathbb{C}^n$ を $\mathbb{R}$-線型空間とみなすと，$\mathbb{R}$ 上 $2n$ 次元である．実際，$e_1, \ldots, e_n$ を $\mathbb{C}^n$ の基本ベクトルとするとき，$\{e_1, \sqrt{-1}e_1, e_2, \sqrt{-1}e_2, \ldots, e_n, \sqrt{-1}e_n\}$ は $\mathbb{C}^n$ の $\mathbb{R}$ 上の基底（の一つ）である．
4) $K[x]$ は有限生成でないし，有限次元でもない．
5) $F(\mathbb{R})$ は有限生成でないし，有限次元でもない．

問 3.5. 問 2.1 に挙げた (V, W) について，

1) V が有限次元である物を全て挙げよ．
2) 1) で挙げた物について，W の基底と，その拡大（延長）であるような V の基底を一組ずつ挙げよ．

問 3.6. V を $\mathbb{C}$-線型空間とする．

1) $v_1, \ldots, v_r \in V$ が $\mathbb{C}$ 上線型独立であるならば，$v_1, \ldots, v_r$ は $\mathbb{R}$ 上線型独立であることを示せ．
2) $v_1, \ldots, v_r \in V$ であって，$\mathbb{R}$ 上線型独立であるが $\mathbb{C}$ 上線型独立でないようなものを一組挙げよ．
3) V を，定数倍として実数倍しか考えないことにより $\mathbb{R}$-線型空間とみなしたものを $V_{\mathbb{R}}$ で表すことにする．このとき $\dim_{\mathbb{R}} V_{\mathbb{R}} = 2 \dim_{\mathbb{C}} V$ が成り立つことを示せ．

問 3.7. $\{v_1, \ldots, v_n\}$ を $\mathbb{R}^n$ の基底とする．$v_1, \ldots, v_n$ を $\mathbb{C}^n$ の元とみなした物を $w_1, \ldots, w_n$ とすると，$\{w_1, \ldots, w_n\}$ は $\mathbb{C}^n$ の $\mathbb{C}$ 上の基底であることを示せ．

問 3.8. $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ とする．

1) $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ を $f(v) = Av$ により定め，$g\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ を $g(u) = Au$ により定める．このとき，$\operatorname{rank}_{\mathbb{R}} f = \operatorname{rank}_{\mathbb{C}} g$ が成り立つことを示せ．
2) $\operatorname{rank}_{\mathbb{R}} A = \operatorname{rank}_{\mathbb{C}} A$ が成り立つことを示せ．

問 3.7 や 3.8 は線型空間の**複素化**と呼ばれる，実線型空間の元の $\mathbb{C}$ 上の線型結合を無理矢理考える操作と関連する．例えば $\mathbb{C}[x]$ は $\mathbb{R}[x]$ の複素化である．

問 3.9. $\dim V = n$ とする．$v_1, \ldots, v_r \in V$ とし，$r > n$ とすると $v_1, \ldots, v_r$ は線型従属であることを示せ．

（以上）